Wykład 1: Wprowadzenie do Modelowania Ordinary Differential Equations (ODE)

1 Informacje wstępne – przykłady zagadnień

Czym są ODE? Równania Różniczkowe Zwyczajne należą do równań, w których występuje tylko jedna zmienna niezależna – jest to najczęściej czas lub zmienna przestrzenna, a wszystkie pozostałe zmienne są funkcjami (i pochodnymi funkcyj) właśnie tej jednej zmiennej.

Równania takie występują w zagadnieniach technicznych, opisie zjawisk przyrodniczych, chemicznych... Kłopotem jest to, że często nie potrafimy tych równań rozwiązywać dokładnie, w zamkniętej postaci matematycznej i potrzebujemy ***metod numerycznego rozwiązywania rozpatrywanych ODE z wystarczającą dokładnością...*** Takie metody będą główną częścią tematyki naszych zajęć.

CIEKAWOSTKI

- The term ***cequatio differentialis*** or ***differential equation*** was first used by Leibniz in 1676 to denote a relationship between the differentials dx and dy of two variables x and y...

  Yet our hazy knowledge of the birth and infancy of the science of differential equations condenses upon a remarkable date, the eleventh day of November, 1675, when Leibniz first set down on paper the equation[1]

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 \,.$$

- Differential equations date back to the mid-seventeenth century, when calculus was discovered independently by Newton (c. 1665) and Leibniz (c. 1684).[2]

□

Na początek obejrzyjmy kilka prostych zagadnień opisywanych za pomocą ODE.

1.1 Rozpad radioaktywny

Zgodnie z ***prawem rozpadu radioaktywnego*** masa radioaktywnego obiektu rozpada się z prędkością proporcjonalną do aktualnej masy obiektu.

Niech masę obiektu w czasie $t > 0$ stanowi funkcja $y = y(t)$. Wówczas prawo rozpadu oznacza związek

$$\frac{dy}{dt} = -ky \tag{1}$$

w którym stała $k > 0$ oznacza współczynnik rozpadu.

- Równanie (1) należy do najprostszych ODE i możemy sprawdzić, że jego analityczne rozwiązanie ma postać $y(t) = ce^{-kt}$ z dowolną stałą c. Wartość stałej może być interpretowana jako wartość masy radioaktywnej w chwili początkowej $c = y(0)$.

- Równanie postaci (1) może być również związane z opisem nagrzewania obiektu, chłodzenia, absorpcji leków w ciele, rozwoju populacji np. bakterii,...

- Gdyby równanie (1) było bardziej skomplikowanym $y' = f(t, y)$ i trudnym do rozwiązania, warto by się przynajmniej zorientować jakie kształty posiadają rozwiązania. Dlatego przydałoby się przygotować ***pole kierunków*** (***direction field*** – zob. rozdz. 3). Pole kierunków pokazuje kierunki stycznych do rozwiązań w rozmaitych punktach obszaru (t, y) i celem naszym byłoby poprowadzić kształt krzywej z wybranego ***punktu początkowego*** po obszarze tak, aby była ona styczna do kierunków w punktach przez które przechodzi.

[1] Edward L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Toronto, 1978, str. 3, 529
[2] James C. Robinson, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge, 2004, str. 1

1.2 CIEKAWOSTKA – Całun Turyński

Jest to przykład ***Zagadnienia Początkowego*** (ZP) dla ***rozpadu radioaktywnego*** w postaci

$$N'(t) = -kN(t) \quad \text{z war. pocz.} \quad N(t_0) = N_0\,. \tag{2}$$

Można sprawdzić, że rozwiązanie przyjmuje postać

$$N(t) = N_0\, e^{-k(t-t_0)} \tag{3}$$

oraz, że spełnia RR oraz warunki początkowe. Z (3) wynika, że ilość masy radioaktywnej maleje wykładniczo do zera.

- ***Okresem Połowicznego Rozpadu*** (OPR) dla konkretnego izotopu promieniotwórczego nazywamy *czas, w ciągu którego ilość tego izotopu zmniejsza się o połowę* i jest to związane ze stałą k występującą w równaniu.

  Jeśli $t_0 = 0$, to $N(t_{połowiczne}) = \frac{1}{2}N_0$ i zachodzi związek

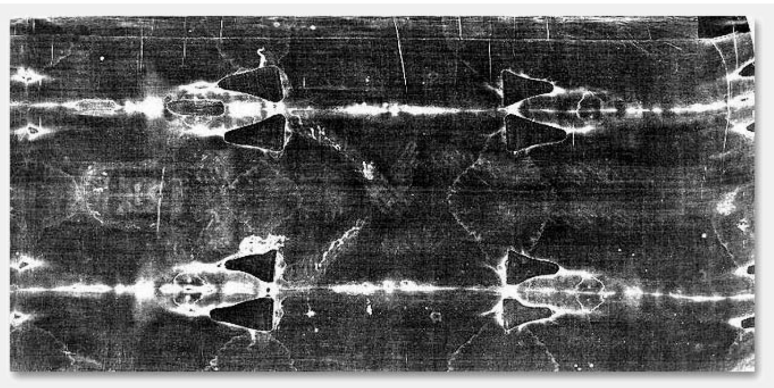
$$-k\, t_{połowiczne} = -\, ln(2)\,. \tag{4}$$

  Jest to wzajemne powiązanie k oraz $t_{połowiczne}$.

- Rozwiązanie (3) stanowi podstawę metody ***datowania radiowęglowego***[3]. A oto istota tej metody
  - Organizm żyjący wymienia materię z otoczeniem i proporcja węgla radioaktywnego (C14) do stabilnego (C12) w materii żywej jest taka jak w atmosferze i ***zasadniczo jest stała***.
  - Gdy organizm umiera (np. drzewo jest ścinane dla drewna, lub bawełna jest zbierana do tkania) węgiel radioaktywny C14 zaczyna się rozpadać zgodnie z modelem (2).
  - Ponieważ OPR węgla C14 wynosi 5700 lat, możemy wyznaczyć stałą k z równań (2) i (4) otrzymując

$$k = \frac{ln(2)}{5700} \approx 1.216 \times 10^{-4}\,. \tag{5}$$

  - Badając stosunek ilości węgla C12 do węgla C14 w próbce badanego materiału można wyznaczyć czas t_0 rozpoczęcia się procesu rozkładu węgla C14.



- W roku 1988 datowano metodą radiowęglową Całun Turyński. Pracowały niezależnie trzy grupy naukowców: z Arizony, Oxfordu i Zurychu. Próbki włókien Całunu zawierały ok. 92% C14 w porównaniu z materią żywą.

- Wyrażenie dla t_0

$$t_0 = 1988 + \frac{ln(0.92)}{1.216e^{-4}} \approx 1302 \tag{6}$$

  pokazuje, że ***Całun powstał w Średniowieczu...***

[3] James C. Robinson, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge, 2004, str. 7

1.3 Rozwój bakterii – wykładniczy wzrost populacji

Gdy bakteria rozwija się w przychylnym dla siebie środowisku, prędkość wzrostu populacji jest proporcjonalna do aktualnej wielkości populacji. Gdybyśmy więc chcieli wyznaczyć krzywą $y = y(t)$, obrazującą wzrost populacji w czasie, to wystarczy rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dt} = ay$$

z odpowiednim parametrem $a > 0$ charakteryzującym prędkość wzrostu. (Porównaj zadanie 1.c)

1.4 Jeszcze dwa proste modele

Ograniczony rozwój populacji. W wielu wypadkach obowiązuje założenie, że populacja $x(t)$ nie przekroczy pewnej liczby C, zwanej *dopuszczalną pojemnością środowiska.* Następnym założeniem jest, że populacja rośnie z prędkością proporcjonalną (ze stałą k) do różnicy między stałą C i aktualnym stanem populacji $x(t)$. Zatem $x(t)$ spełnia

$$x' = k(C - x(t)), \quad \text{z war. pocz.} \quad x(t_0) = x_0 \,. \tag{7}$$

Chłodzenie – prawo Newtona mówi, że prędkość chłodzenia obiektu jest proporcjonalna (ze stałą k) do różnicy pomiędzy temperaturą $T(t)$ obiektu i temperaturą otoczenia T_{otocz}. Otrzymujemy

$$T' = k(T_{otocz} - T(t)), \quad \text{z war. pocz.} \quad T(t_0) = T_0 \,. \tag{8}$$

Obydwa równania (7) i (8) są tej samej postaci, a ich rozwiązywanie nastąpi w zadaniu 3.

1.5 Lisy i Zające (prey–predator)

Wyobraźmy sobie teren, na którym żyją lisy $y(t) \geq 0$ i zające $x(t) \geq 0$. Zające rozmnażają się w sposób wykładniczy. Zające nie giną same, ale gdy spotkają się z lisem, to najczęściej są przez niego zjadane. Prawdopodobieństwo, że zając spotka lisa i zostanie zjedzony, jest proporcjonalne do iloczynu obu populacji. Lisy rozmnażają się dzięki żywieniu się zającami, a giną jedynie z chorób lub ze starości...

Takie założenia pozwalają ułożyć równania różniczkowe opisujące ten proces

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy & (= x(\alpha - \beta y)) \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy & (= -y(\gamma - \delta x)) \end{cases}$$

Od roku 1925 ten układ równań nazywany jest *równaniem Lotki–Volterry*. Aby narysować odpowiednią krzywą na polu kierunków potrzebujemy jeszcze ***warunku początkowego*** np. dla $t = 0$: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

O tym, jak ten układ ODE rozwiązać dokładnie, dowiemy się później...

1.6 Drganie ciężarka na sprężynie

Doświadczenie – do pionowego drgania wzbudzamy obiekt o masie m, podwieszony na sprężynie długości L.

1. Wisi sprężyna długości L.

2. Podwieszamy na niej obiekt o masie m. Sprężyna naciąga się o ΔL. Obiekt znajduje się w bezruchu – obie siły się równoważą: siła mg ciężkości obiektu oraz skierowana do góry siła naciągu sprężyny, która zgodnie z prawem Hooka jest równa $k\Delta L$ dla pewnej stałej $k > 0$. Równanie równowagi sił

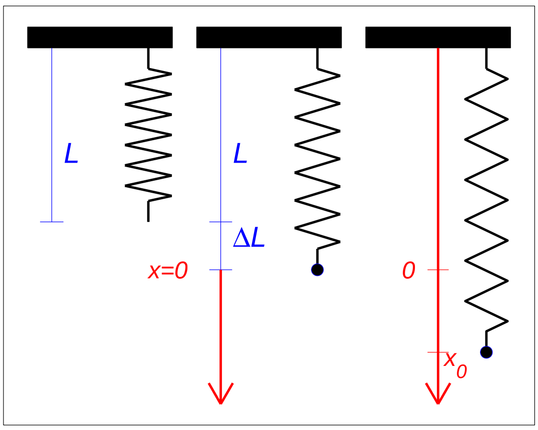
$$F = mg - k\Delta L = 0 \,. \tag{9}$$

3. Wprowadźmy oś pionową OX skierowaną w dół, z początkiem $x = 0$ na wysokości obiektu.

4. Teraz ściągamy obiekt w dół do pktu $x_0 > 0$.

5. Będziemy ignorować wszelkie siły powodowane przez otoczenie – np. siły oporu środowiska wobec ruchu...

Drgania na Sprezynie



Drugie prawo Newtona względem $x = x(t)$ brzmi

$$mx'' = mg - k(x + \Delta L) \qquad \text{a dzięki (9)} \quad \to \qquad mx'' = -kx\,. \tag{10}$$

Warunki początkowe $x(0) = x_0,\ \ x'(0) = 0.$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania (10), spełniające warunki początkowe, ma postać

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Gdyby istniała jeszcze siła oporu – proporcjonalna do prędkości obiektu, to powinniśmy dopisać w równaniu (10) składnik rx' dla $r > 0$, otrzymując

$$mx'' + rx' + kx = 0\,.$$

W przyszłości będziemy rozpatrywać również równania wyższych rzędów...

2 Sposoby rozwiązywania

- Przypomnijmy sobie *całkę nieoznaczoną*

  $$y(x) = c + \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

  Łatwo sprawdzić, że jest to wzór na rozwiązanie $y = y(x)$ równania różniczkowego

  $$y'(x) = f(x) \tag{11}$$

  z ***warunkiem początkowym*** $y(a) = c\,.$

- Ale funkcja f pod całką w (11) może być bardziej skomplikowaną, np. $f = f(x, y)$, i całka

  $$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\,dt$$

  może być zbyt trudną do policzenia. W takim wypadku, dla krótkiego odcinka całkowania, można całkę przybliżyć ***metodą prostokąta***. Aproksymujemy $f(x, y(x)) \approx f(x_0, y(x_0))$ dla $x \in [x_0, x_0 + h]$, gdzie $h > 0$ jest małe, i otrzymujemy wzorek

  $$y(x) = y(a) + f(a, y(a))(x - a)\,. \tag{12}$$

  Skonstruowana metoda (12) jest znana jako metoda numeryczna dla ODE pod nazwą ***metoda Eulera***[4] .
  Zajmiemy się nią i innymi w przyszłości...

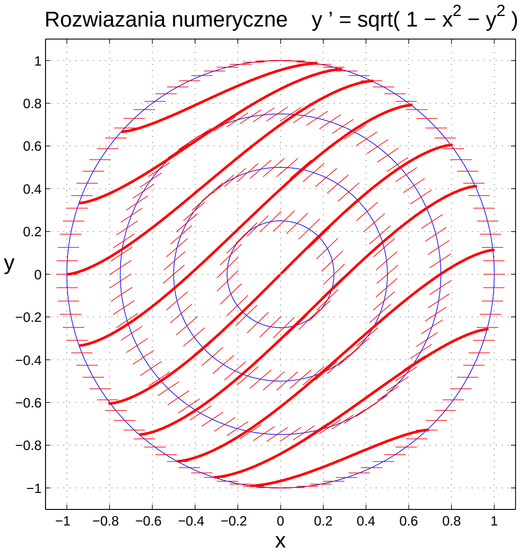
3 Pole kierunków, Izokliny

Zajmijmy się równaniem różniczkowym

$$y' = f(x, y) \qquad \text{dla} \qquad f(x, y) \equiv \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

[4]Leonhard Euler (1707-1783)

- Widać, że obszarem, na którym równanie jest określone, jest jedynie koło jednostkowe.
- Poza kołem jednostkowym nie ma już żadnych rozwiązań rzeczywistych.
- Wyznaczmy wartości funkcji f w rozmaitych punktach (x, y) koła jednostkowego.
- I narysujmy krótkie odcinki ilustrujące kierunki stycznych do rozwiązań przechodzących przez te punkty.
- Otrzymujemy ***pole kierunków***.
- Teraz trzeba narysować na tym polu kierunków krzywe tak, aby były one styczne do narysowanych odcinków. Jeśli nam się to uda, to otrzymamy rozwiązania rozpatrywanego ODE.
- Krzywe $(x(t), y(t))$, wzdłuż których wartości funkcji f posiadają takie same wartości nazywamy ***izoklinami***.



4 Zadania na ćwiczenia

1. Sprawdzić czy podane funkcje są rozwiązaniami odpowiednich równań różniczkowych zwyczajnych:

a. $y'' - 2y' + y = 0, \qquad y = xe^x\,,$

b $y'' + 16y = 0, \qquad y(t) = a\cos(4t)\,,$

c. $P'(t) = (a - bP)P, \qquad P(t) = \frac{ac_1e^{at}}{1+bc_1e^{at}}\,,$

d. $X'(t) = (2 - X)(1 - X), \qquad t = \ln\frac{2-X}{1-X}\,,$

e. $xy' - y - x\sin(x) \;=\; 0, \qquad y = x\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ na półprostej $(0, +\infty)\,,$

f. $y' + 2xy = 1, \qquad y = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt + c\,e^{-x^2}\,.$

2. W przyszłości udowodnić wzory (4) i (6).

3. Dla obu równań (7), (8) narysować pole kierunków; narysować kilka rozwiązań dla różnych wartości stałej k... W przyszłości rozwiązać równania.

4. Sprawdzić poprawność rozwiązania równania (10).

5. Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji F zdefiniowanej jako całka oznaczona

$$F(x) \equiv \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,t)dt$$

w której funkcje $f,\ g,\ h$ posiadają ciągłe pochodne co najmniej pierwszego rzędu.

6. Naszkicować pola kierunków następujących równań:

$$y' \;=\; e^{1/x}, \qquad y' \;=\; \frac{1}{1+e^{1/x}}, \qquad y' \;=\; |y|, \qquad y' \;=\; \frac{\sin x}{\sin y}, \qquad y' \;=\; \frac{\sin y}{\sin x}.$$

Proszę zastanowić się nad kształtem krzywych będących rozwiązaniami...

7. Rzeka ma szerokość 100m $(0 \le s \le 100)$. Rozkład prędkości prądu w poprzek koryta rzeki jest równy: $v \;=\; 2\sin(s\pi/100)[\mathrm{m/s}]$. Jak daleko zostanie zniesiona łódka prowadzona przez wioślarza prostopadle do osi rzeki, jeśli płynie on od brzegu do brzegu ze stałą prędkością $2[\mathrm{m/s}]$?

* * *