Zbiory Julii

Adam Szustalewicz

seminarium ZMN 2010.06.15

Wstęp

W latach 1918-1920 dwaj francuscy matematycy

Pierre Fatou i **Gaston Julia**

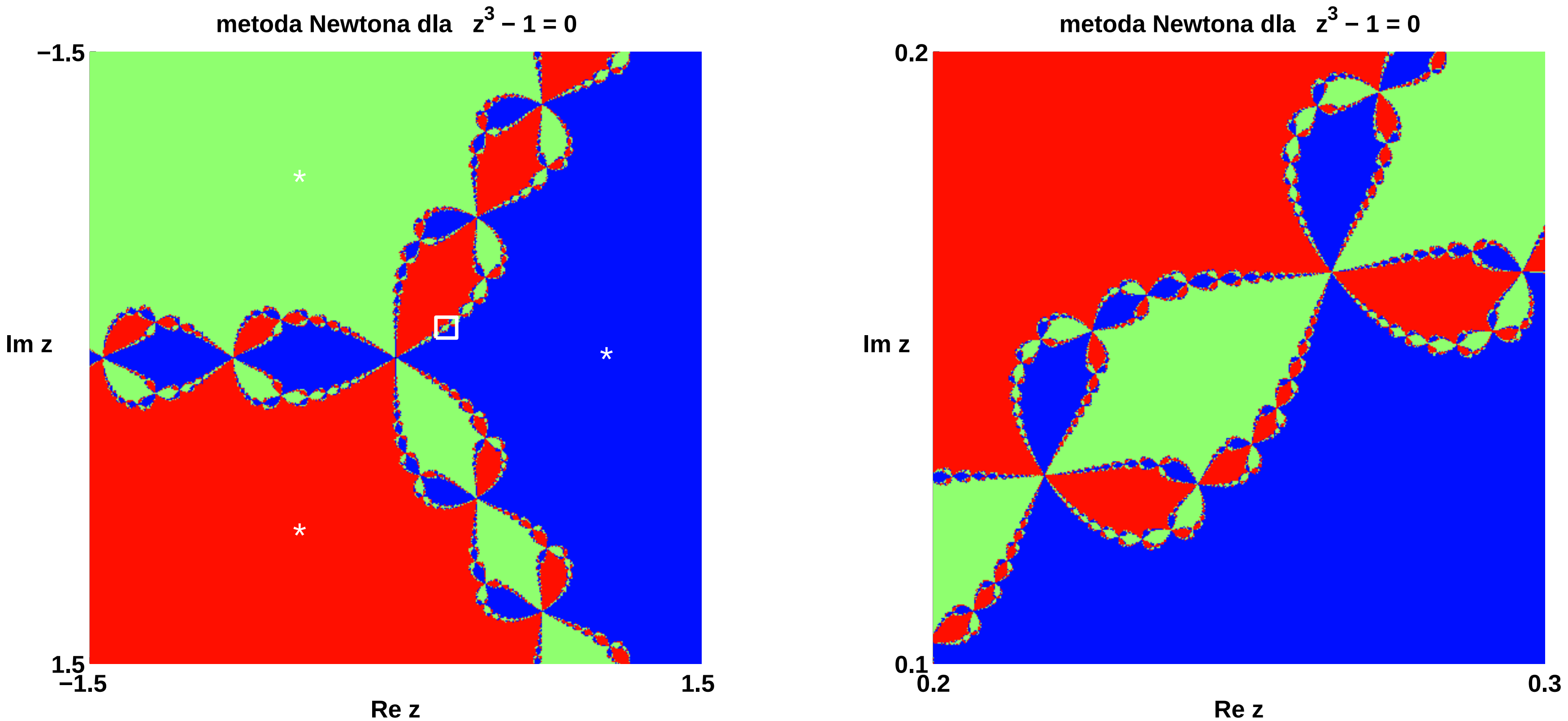
prowadząc badania - odkryli bardzo fascynujące zbiory.

Artykułem wyjściowym do odkrycia tych zbiorów była praca brytyjskiego matematyka **Sir Artura Cayley'a** z roku 1897, dotycząca wyznaczania metodą Newtona pierwiastków równania zespolonego

$$z^3 - 1 = 0\,.$$

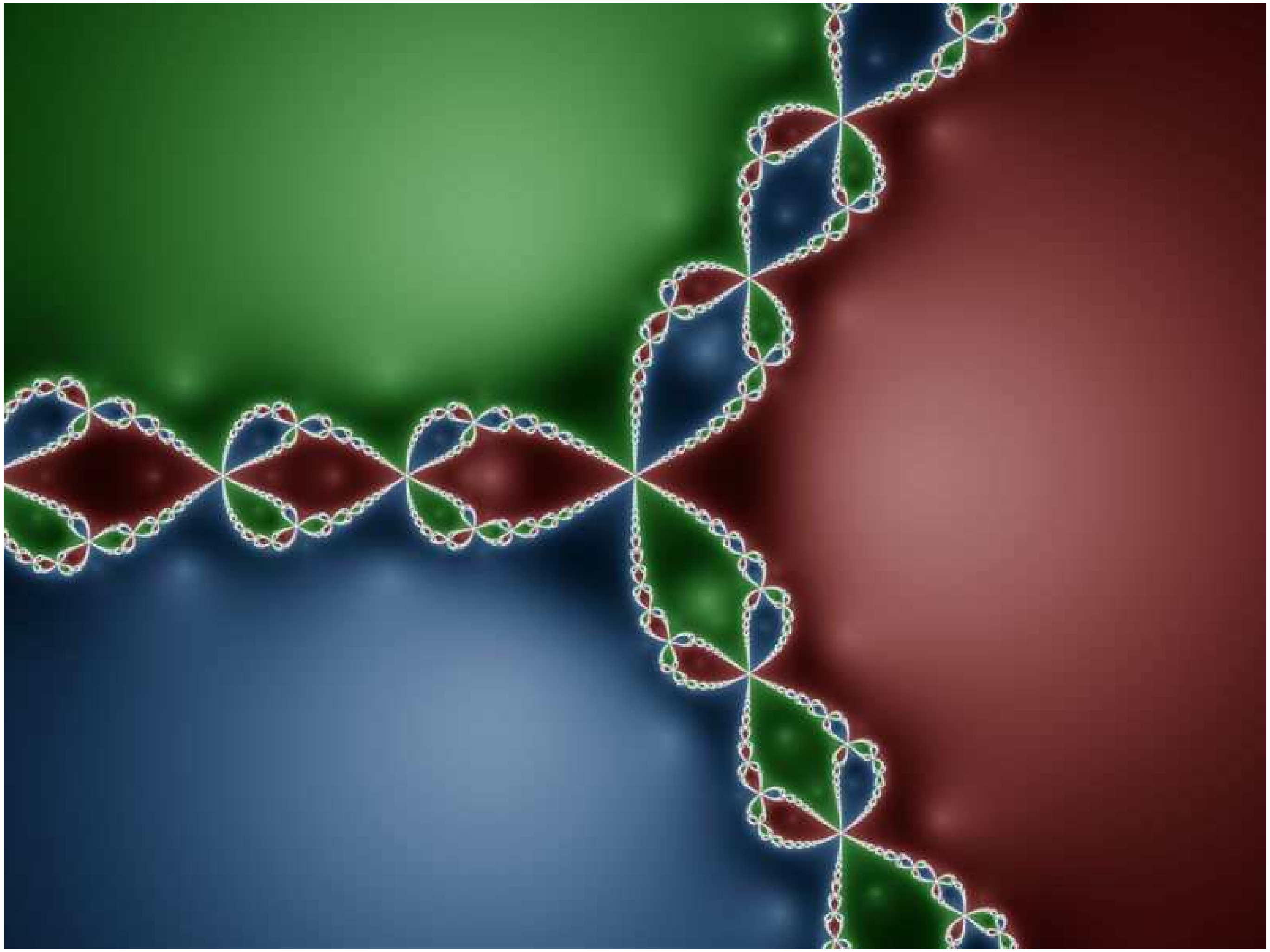
Płaszczyzna zespolona została podzielona na 3 rozłączne regiony - baseny przyciągania pierwiastków równania.

baseny przyciągania pierwiastków



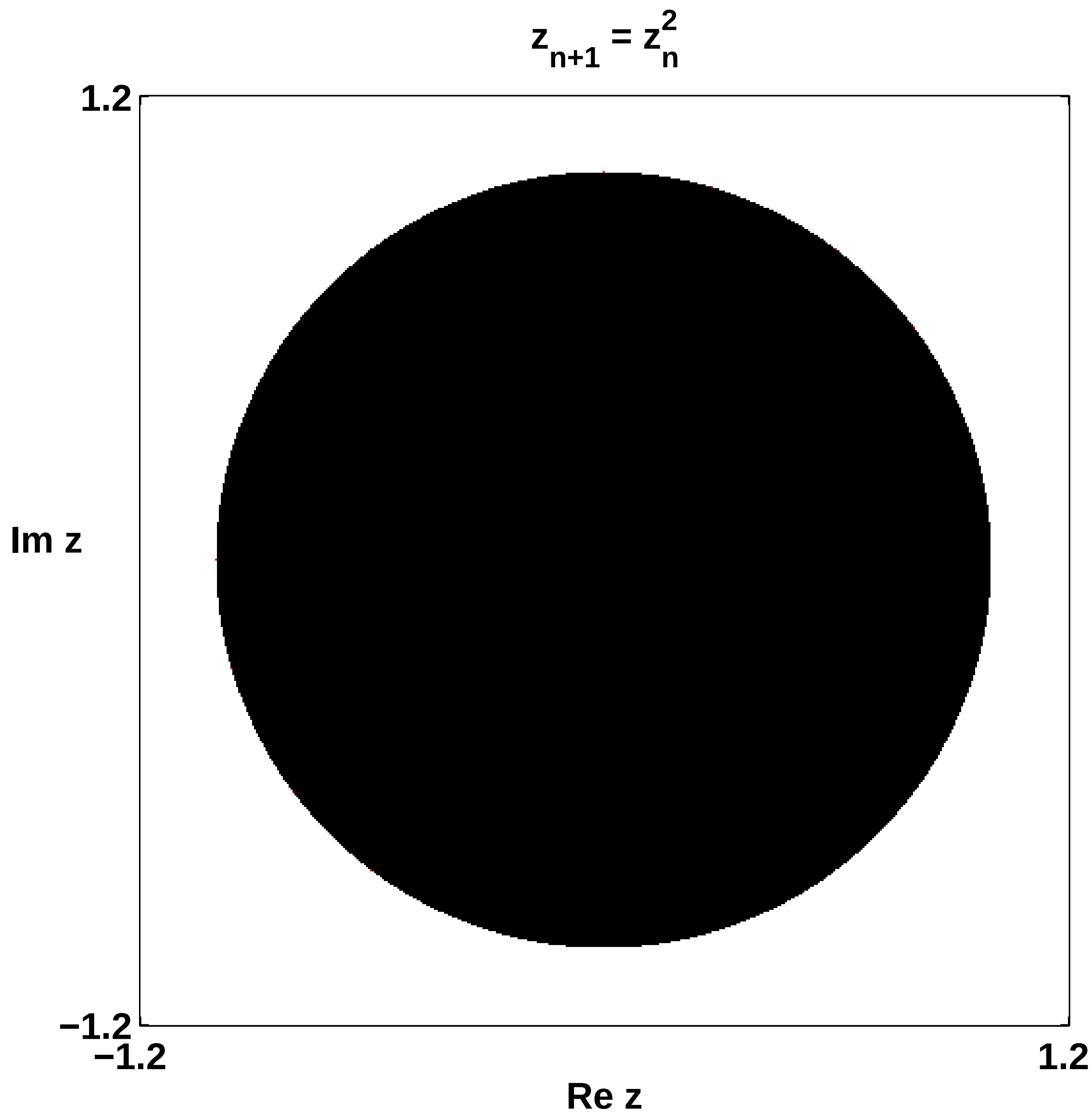
Julia podał, że baseny przyciągania mają wspólny brzeg i że każdy jego punkt jest trójrogiem tzn. dowolnie blisko każdego punktu brzegu można znaleźć punkty należące do każdego z tych basenów przyciągania.

Próba rysunku trójrogu

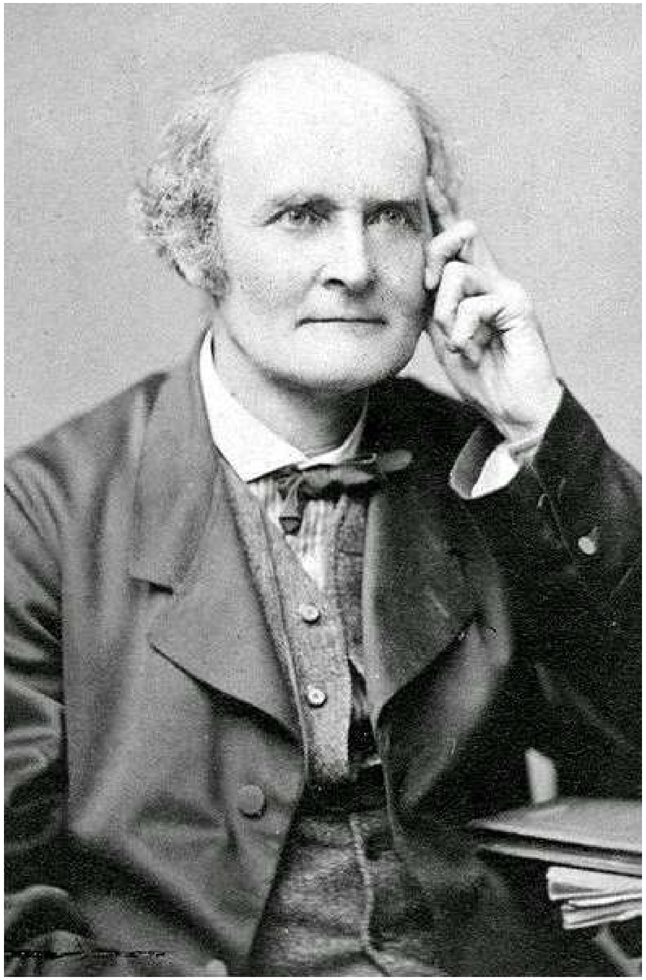


http://en.wikipedia.org/wiki/Fatou_set

Zbiór rozgraniczający dla $z_{n+1} = z_n^2$



Arthur Cayley



był matematykiem brytyjskim (16.09.1821 – 26.01.1895).

- **twierdzenie Cayley'a-Hamilton'a**
  każda macierz kwadratowa A *nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego*

$$p(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) = 0\,.$$

- *The Newton-Fourier Imaginary Problem* (1879) - rozwiązywał metodami iteracyjnymi równanie zespolone

$$z^3 + c = 0\,.$$

Pierre Fatou

Pierre Joseph Louis Fatou

(28.02.1878 – 10.08.1929)

matematyk francuski, zajmujący się metodami iteracyjnymi i rekurencyjnymi. Interesował się zwłaszcza ciągiem zespolonym

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

z warunkiem początkowym $z_0 = 0$.

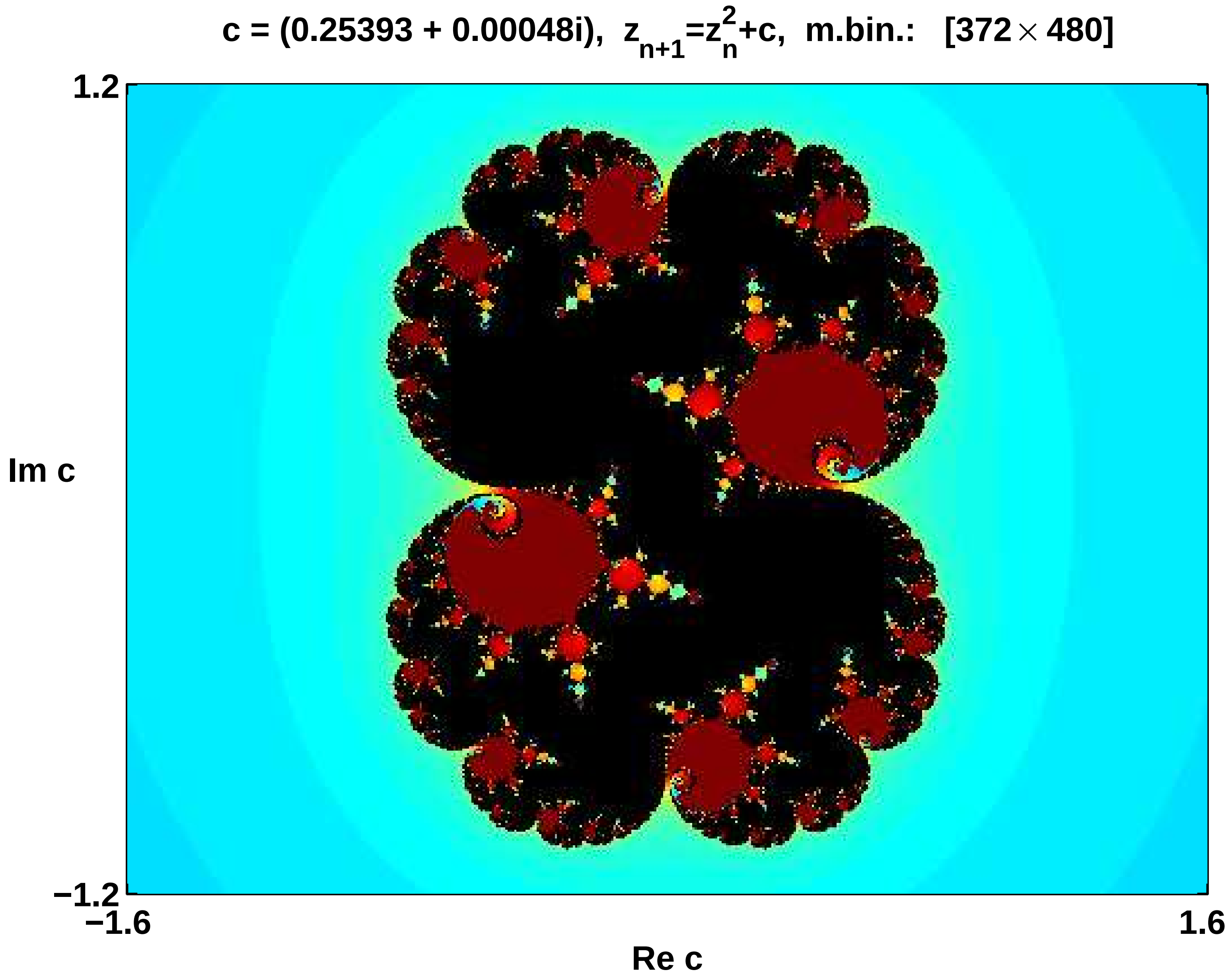
W 1917 r. pisał prace związane z *Fundamental theory of iteration*.
Jego wyniki były podobne do wyników Julii (1918); aktualnie prace obu matematyków są zwane the generalised Fatou–Julia theorem.

Gaston Maurice Julia

Gaston Maurice Julia (1893-1978) – francuski matematyk badał układy dynamiczne, w szczególności iteracje zespolonej funkcji kwadratowej. W *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* opisał własności zbioru rozdzielającego dwa baseny dla ciągu $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Ciąg jest w nich: ograniczony, nieograniczony.

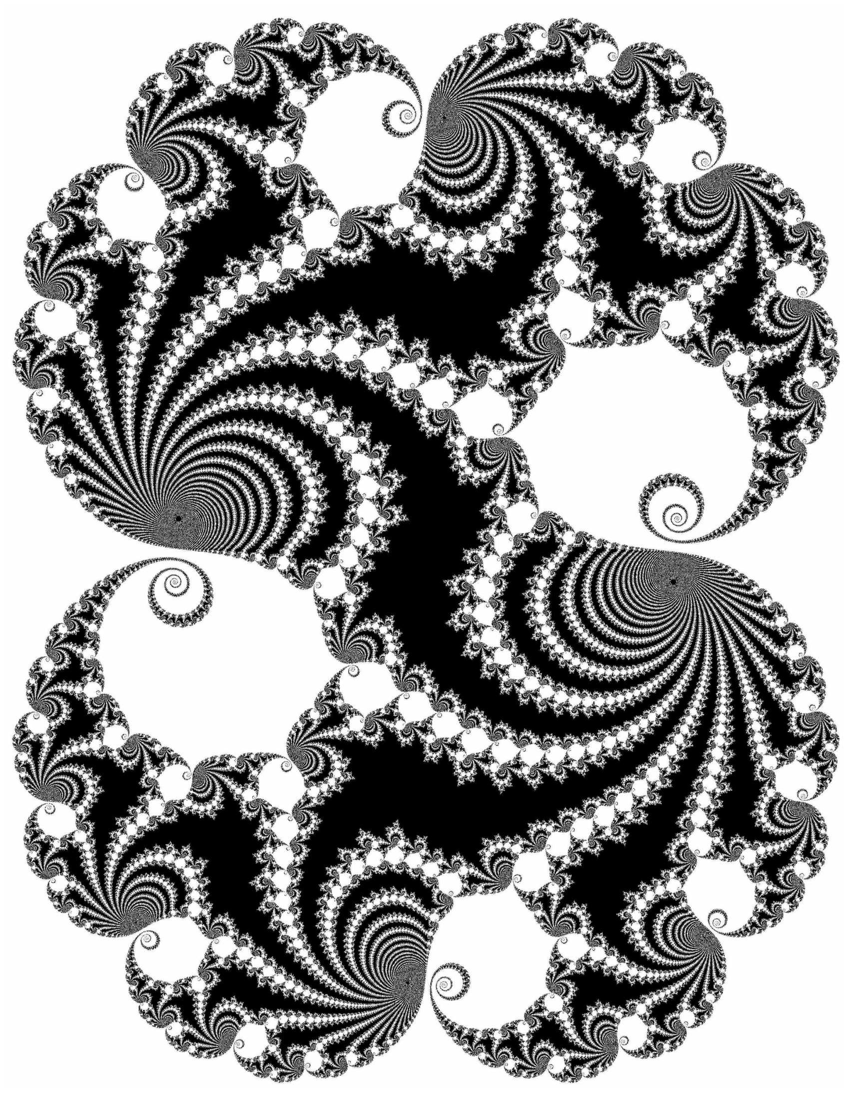
Gaston Maurice Julia

Zbiór rozgraniczający bardziej złożony

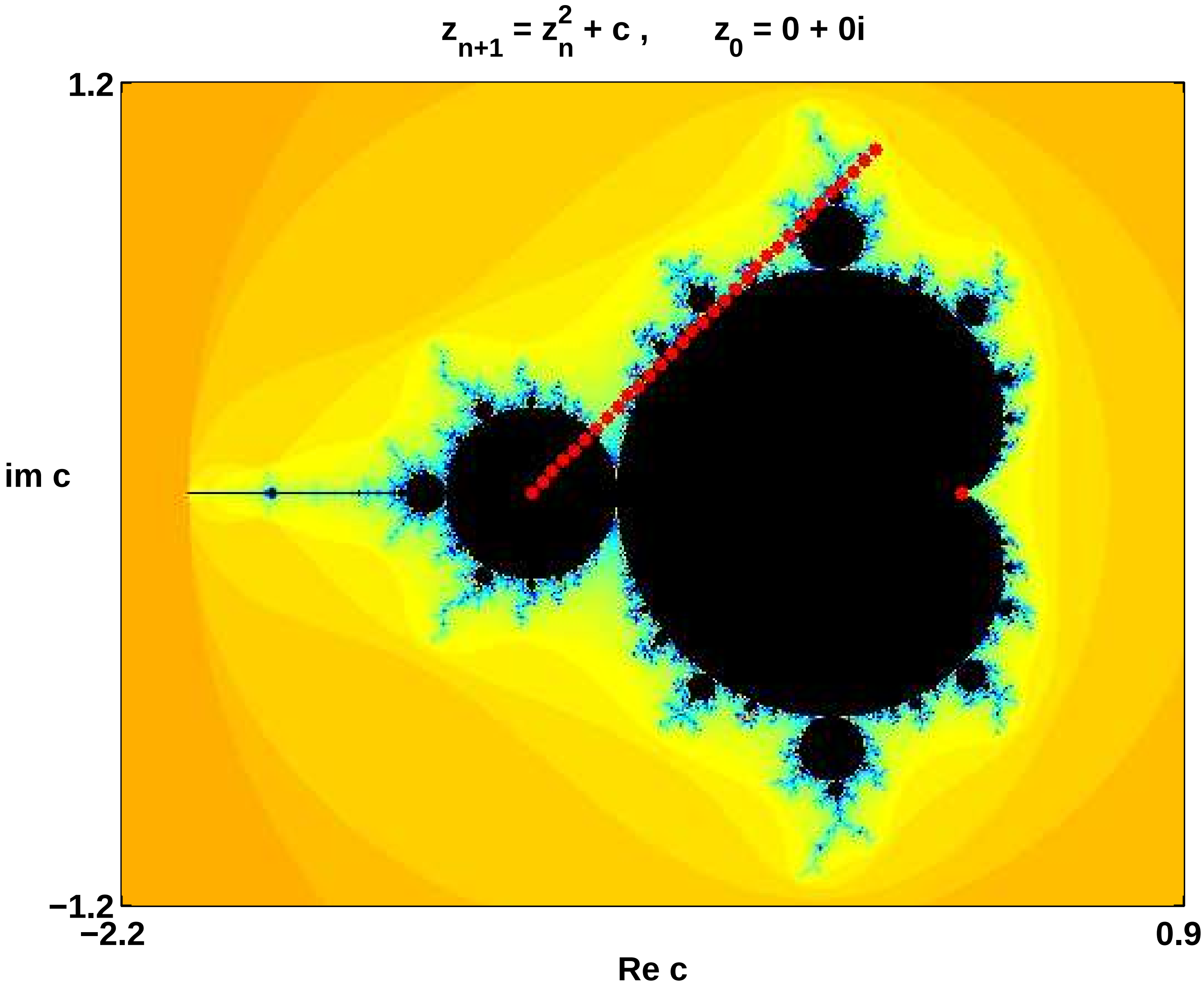


Więcej szczegółów...

$c = (0.253930 + 0.000480i)$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$ m. bin: [3600 $\times$ 3600]



Parametr c = (0.253930+0.000480i)



Benoît Mandelbrot

Benoît Mandelbrot (ur. 20.11.1924, Warszawa) - matematyk francuski i amerykański, znany jako ojciec geometrii fraktalnej. Od 1957 roku pracował w USA dla firmy IBM. Dotarł do prac Gastona Julii i Pierre'a Fatou. "Jak wygląda zbiór tych parametrów c dla których odpowiedni zbiór Julii jest spójny?" Pierwsze szkice (1979) drukowane były na drukarce igłowej... Mandelbrot wykorzystywał najnowsze komputery...

- 1936 - wyjazd do Francji,
- 1958 - wyjazd do USA,
- 1975 - termin fractal,
- 1982 - zbiór Mandelbrota,
- 1990 - 27500 Mandelbrot (asteroid),
- 1993 - Nagroda Wolfa (fizyka),
- 2003 - Nagroda Japonii.

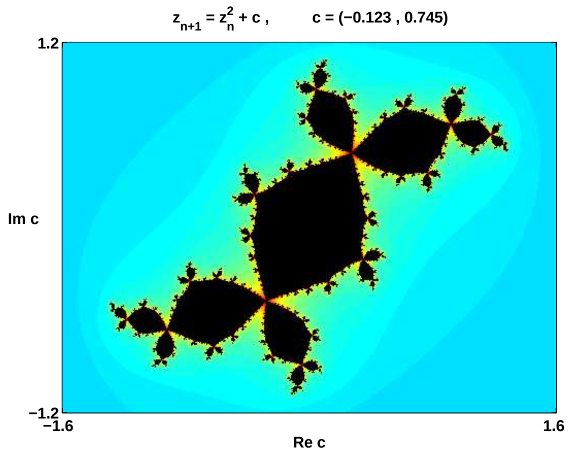
Zbiory Julii wyższych rzędów

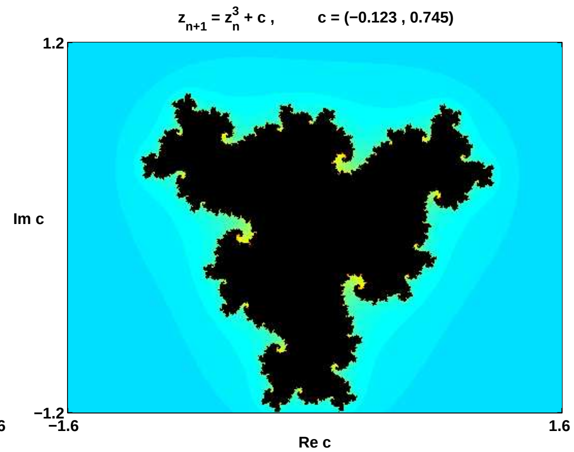
- Julia $z_{n+1} = z_n^2 + c$
- Cubic Julia $z_{n+1} = z_n^3 + c$
- Quadratur Julia $z_{n+1} = z_n^4 + c$
- Penta Julia $z_{n+1} = z_n^5 + c$
- Hexa Julia $z_{n+1} = z_n^6 + c$
- Hepta Julia $z_{n+1} = z_n^7 + c$

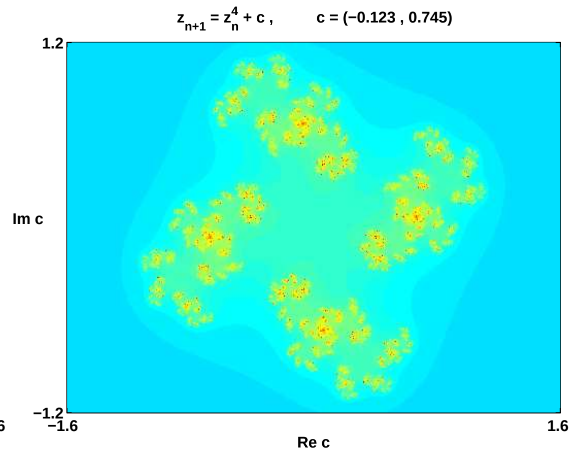
http://members.lycos.co.uk/ququqa2/Fractalspl/JulialO.htm

Zbiory Julii wyższych rzędów

Dla $c = -0.123 + 0.745i$ otrzymujemy:

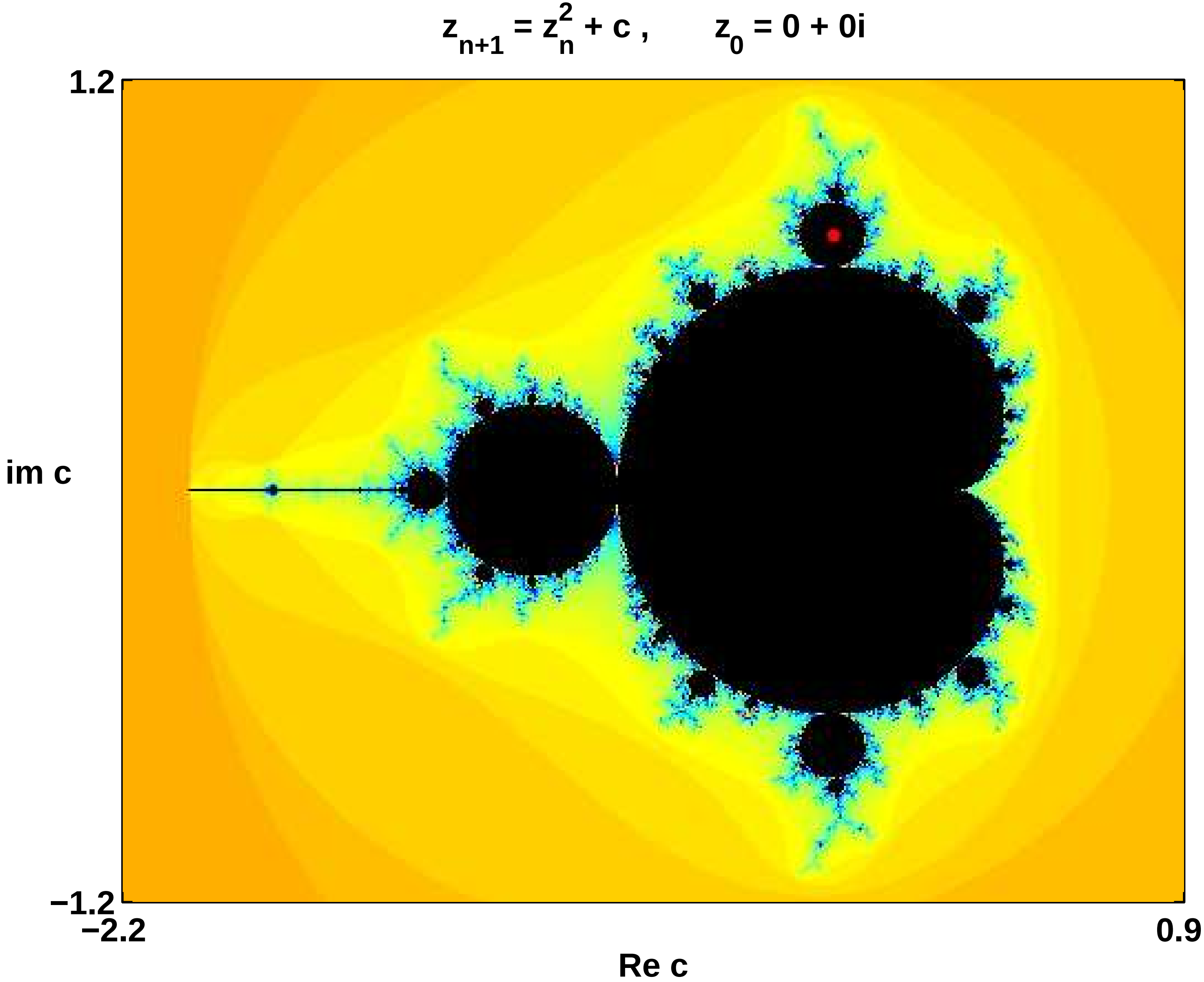




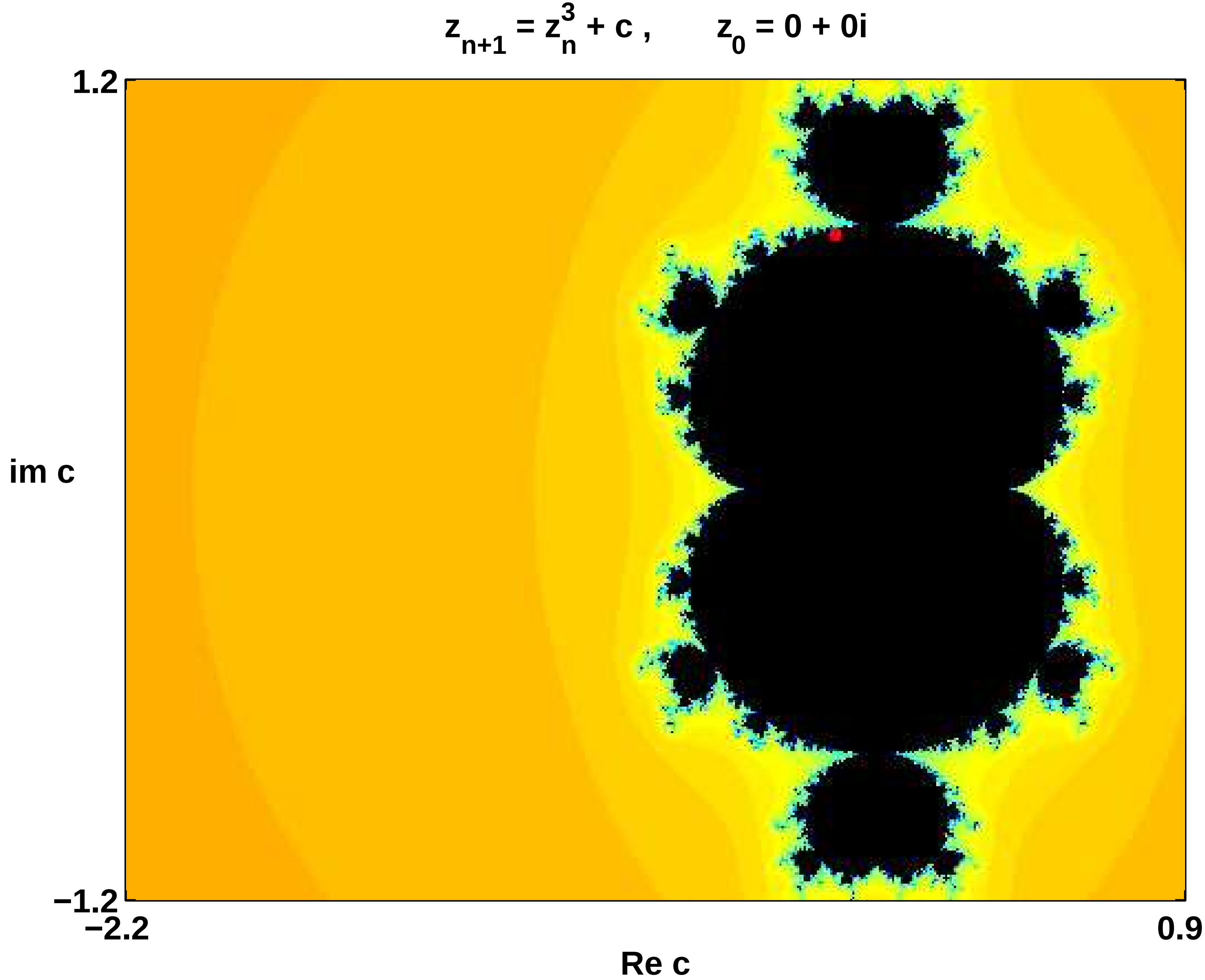


$$z_{n+1} = z_n^2 + c; \qquad z_{n+1} = z_n^3 + c; \qquad z_{n+1} = z_n^4 + c;$$

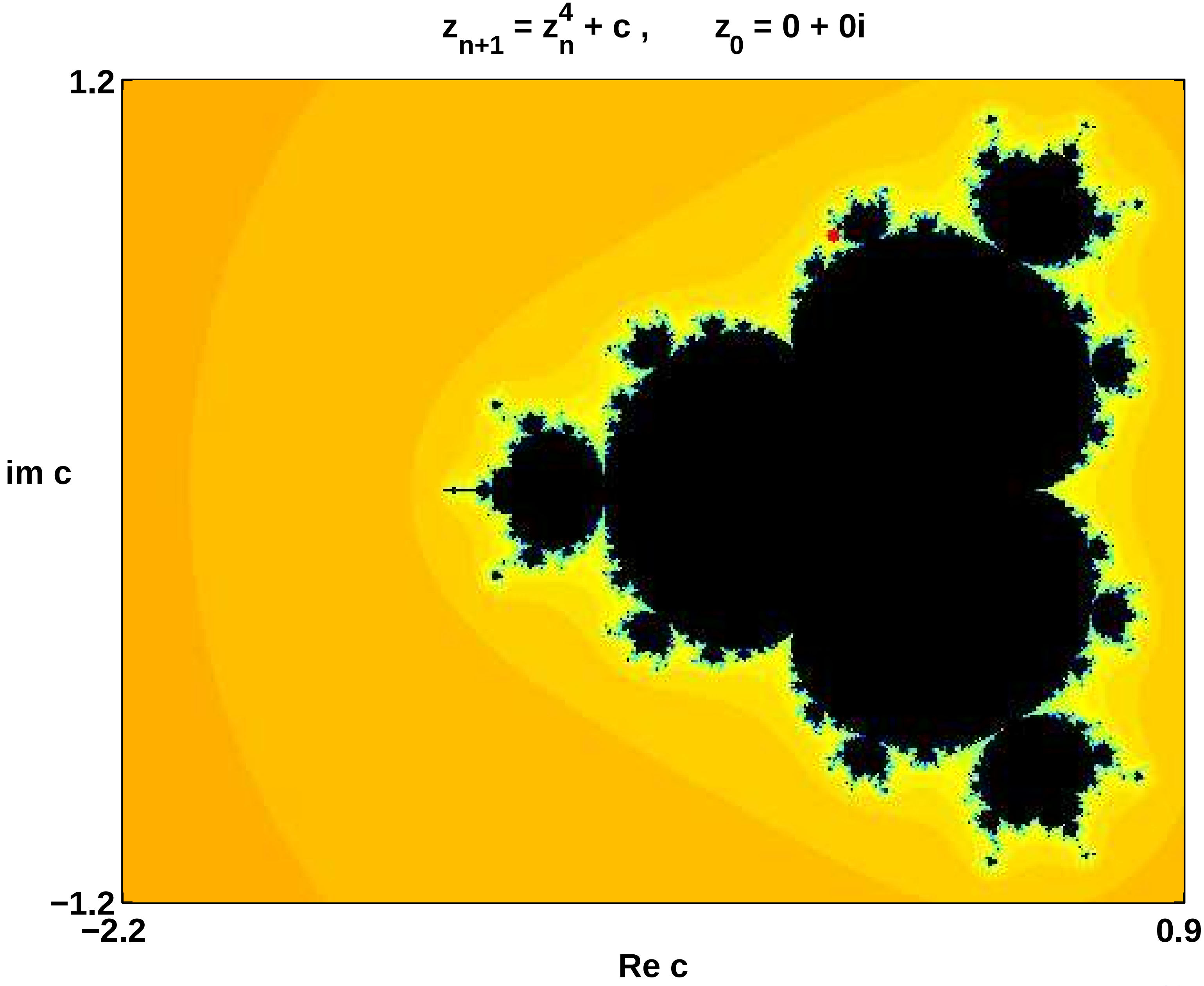
Żuk Mandelbrota



Żuk Mandelbrota dla $z_{n+1} = z_n^3 + c$

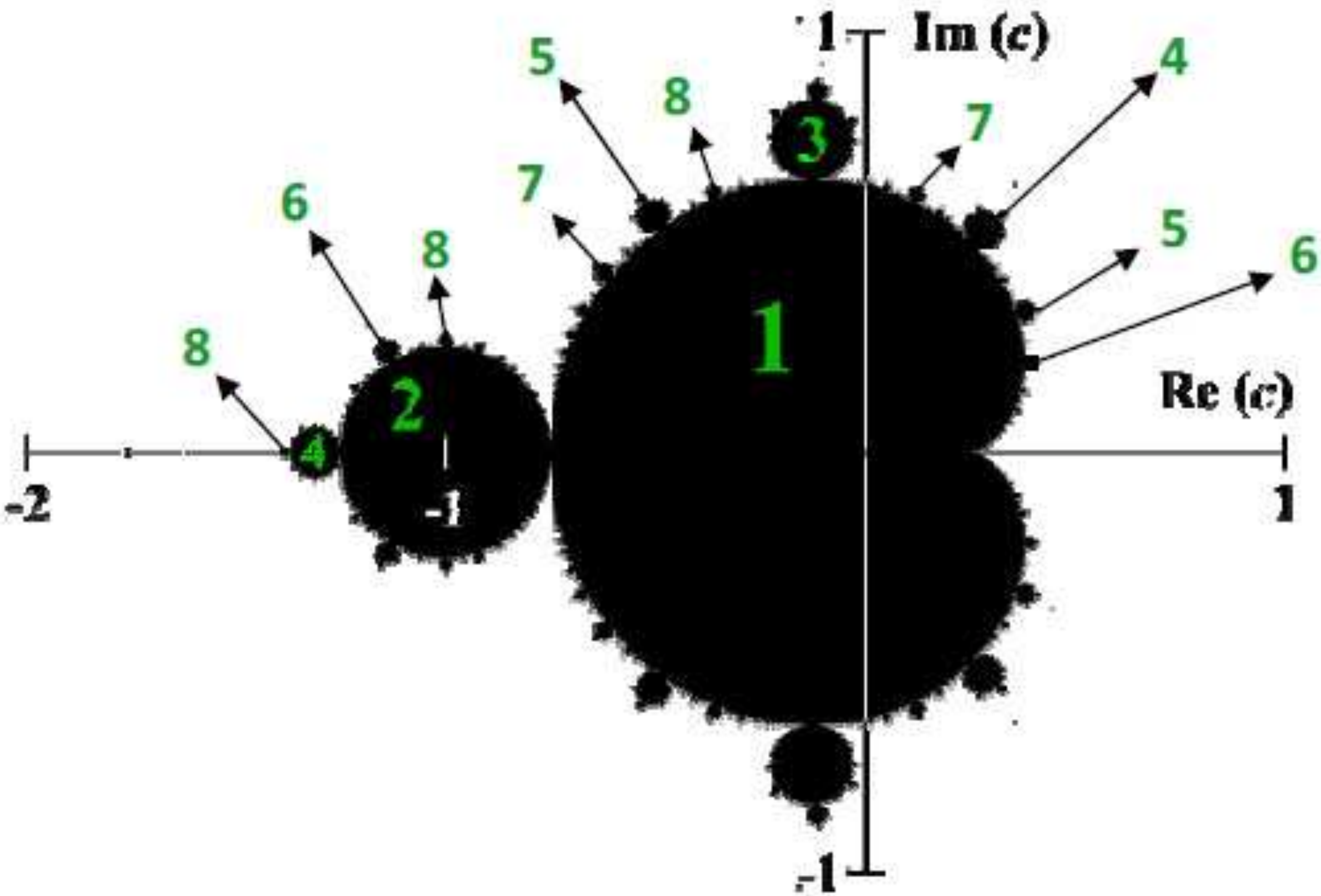


Żuk Mandelbrota dla $z_{n+1} = z_n^4 + c$



$z_{n+1} = z_n^2 + c$: żuk Mandelbrota

Powrócimy jeszcze do okresów orbit - rozmaite miejsca wyboru parametru c

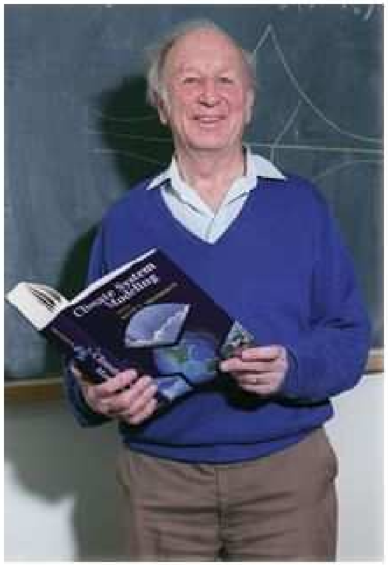


Prognozowanie pogody

Teza Laplace'a: jeśli znamy warunki początkowe, określające stan układu, oraz dysponujemy odpowiednimi równaniami dynamicznymi, możemy jednoznacznie przewidzieć jego przyszłość.

- 1904 Vilhelm Bjerkens zasugerował, że pogoda może być prognozowana przy użyciu zestawu hydrodynamicznych i termodynamicznych równań opisujących podstawowe procesy atmosferyczne. Podzielił Ziemię na kwadraty i rejestrował warunki meteo,
- 1922 Lewis Richardson, *Weather prediction with numerical methods*, opisał procesy fizyczne w atmosferze, wykorzystując równania hydrodynamiczne. Przewidział pogodę na sześć godzin naprzód,
- 1953 John von Neumann - 6 min. pracy komputera i przepływ niżu na Ameryką Północną został przewidziany na 24 godziny wcześniej z niespotykaną dotąd dokładnością,
- 1960 Lorenz opracował model (12 RR) - zależności między prędkością wiatru, temperaturą, ciśnieniem i wilgotnością.

Edward Norton Lorenz (1917 - 2008)



„Dowolny układ fizyczny,
który zachowuje się nieokresowo,
jest nieprzewidywalny."

Edward Norton Lorenz

Artykuł z 1963 r. dla Nowojorskiej Akademii Nauk: ¨nawet machnięcie skrzydeł motyla w Brazylii może wywołać tornado w Teksasie¨.

Lorenz był pionierem teorii chaosu; niektórzy zaliczają ją - obok teorii względności i mechaniki kwantowej - do trzeciej wielkiej rewolucji naukowej XX w.

Potem odkryto, że podobna nieprzewidywalność towarzyszy zjawiskom z dziedziny hydrodynamiki, fizyki jądrowej, ekonomii, biologii czy astrofizyki.

Nazwano to ¨efektem motyla¨ - dla pewnych układów deterministycznych nawet minimalne zmiany wartości danych początkowych zostają bardzo szybko wzmocnione i powodują ogromne zmiany w ewolucji układu...

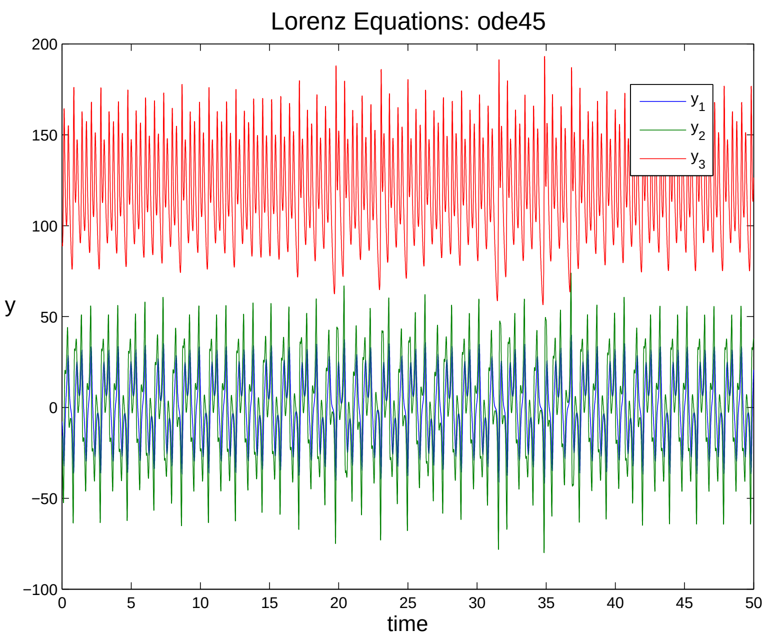
Atraktor Lorenza (1963)

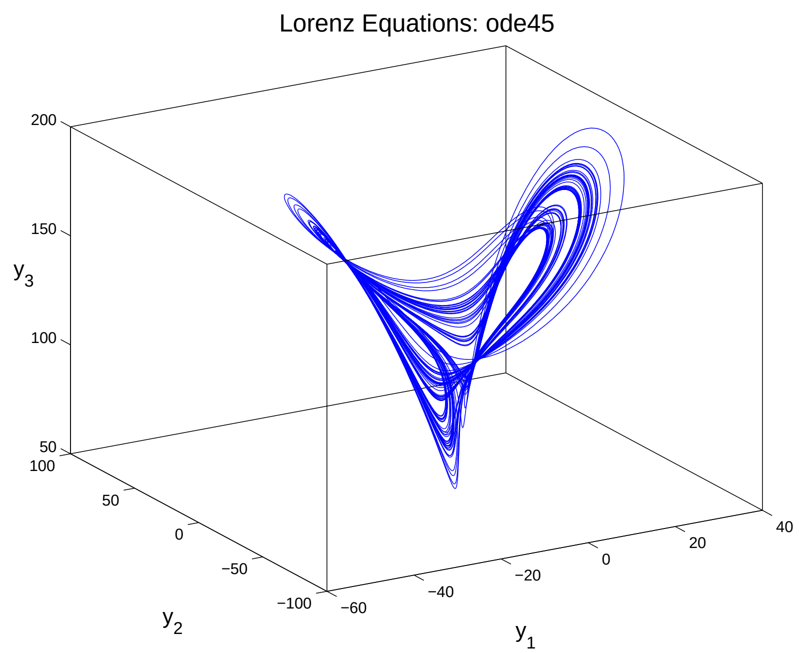
Wymiar fraktalny atraktora Lorenza wynosi $d = 2.073$ - podali Grassberger and Procaccia (1983).

$$x' = \sigma(y - x); \qquad y' = x(\rho - z) - y; \qquad z' = xy - \beta z;$$

z parametrami:

$$\sigma = 10; \qquad \beta = 8/3; \qquad \rho = 126.52;$$



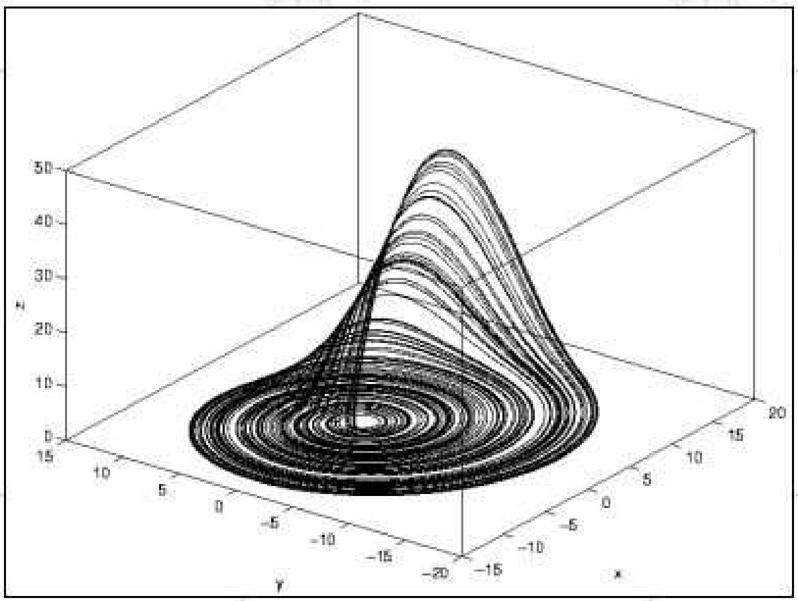


Otto E. Rössler (ur. 20.05.1940)

Atraktorem dla układu dynamicznego nazywamy zbiór domknięty A, taki, że dla rozmaitych warunków początkowych rozwiązania układu dążą do zbioru A.

Ten układ równań został zdefiniowany przez Rösslera w roku 1976

$$x' = -y - z; \qquad y' = x + ay; \qquad z' = b + z(x - c);$$



Parametry:

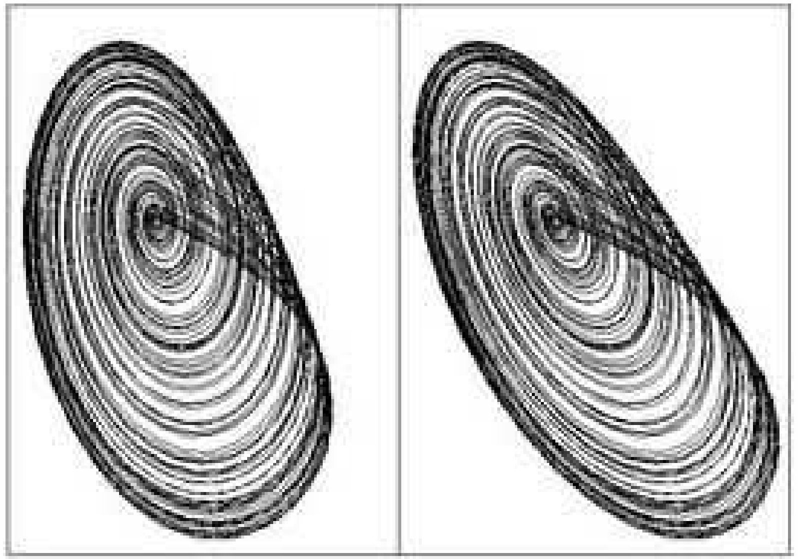
$$a = 0.2,\ b = 0.2,\ c = 5.7$$

lub

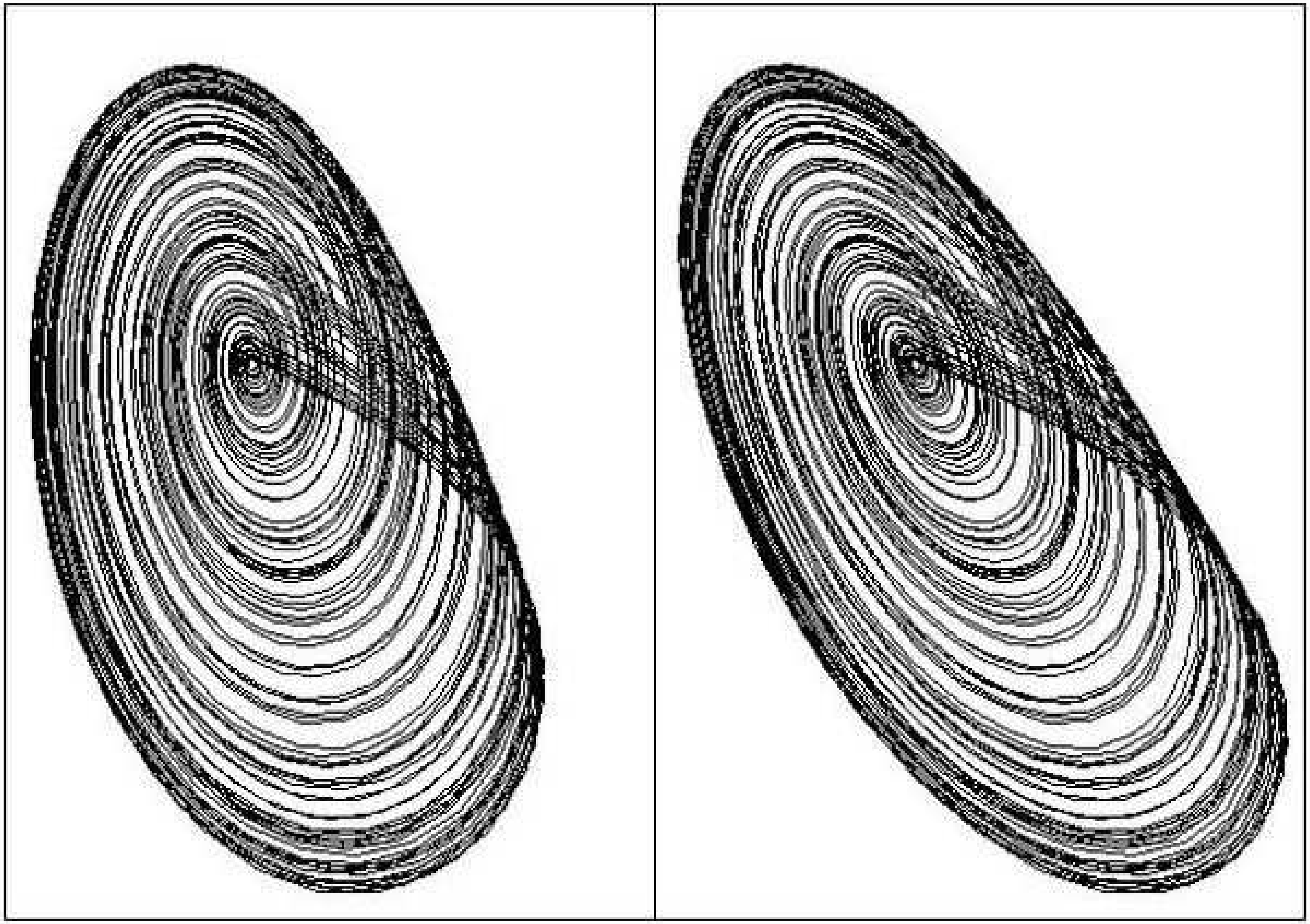
$$a = 0.1,\ b = 0.1,\ c = 14$$

Wymiar fraktalny d atraktora Rösslera wynosi $d \in (2.01\,, 2.02)$.

Ilustracja trójwymiarowa



Wersja większa



Co to jest fraktal?

Ze względu na olbrzymią różnorodność przykładów matematycy obecnie unikają podawania ścisłej definicji i proponują określać fraktal jako zbiór, który:

- ma nietrywialną strukturę w każdej skali,
- struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- jest samopodobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to w przybliżonym lub stochastycznym,
- jego wymiar Hausdorffa jest większy niż jego wymiar topologiczny,
- ma względnie prostą definicję rekurencyjną,
- ma naturalny wygląd („poszarpany”, „kłębiasty”, itp.)...

Benoît Mandelbrot twierdzi, że **fraktalem jest wszystko**.

dziękuję...