



Stała Feigenbauma... bifurkacje i żuk Mandelbrota

Adam Szustalewicz

seminarium ZMN 31.03.2009

R. R. - zag. początkowe

$$(1) \quad y' = f(y), \quad y(0) = y_0; \quad y = y(t), \quad t \geq 0, \quad y(t) \in R^m.$$

D1. y_* jest punktem stałym, p. równowagi RR. (1) : $f(y_*) = 0$. \square

D2. y_* jest lokalnie przyciągającym jeśli istnieje takie jego otoczenie, że jeśli $y(t)$ wpadnie do niego, to $y(t) \rightarrow y_*$ dla $t \rightarrow \infty$. \square

Rozp. (1) dla $y(t)$ blisko y_* : $y(t) = y_* + \epsilon(t)$

$$y'(t) = \epsilon'(t) = f(y_* + \epsilon(t)) \cong f(y_*) + \frac{df}{dy}(y_*) * \epsilon(t)$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon'(t) = \frac{df}{dy}(y_*) * \epsilon(t).$$

Jest to układ równań liniowych o stałych współczynnikach i warunkiem wystarczającym lokalnego przyciągania przez y_* jest

$$\forall \lambda \leftrightarrow \frac{df}{dy}(y_*) \quad : \quad \operatorname{re}(\lambda) < 0.$$

R. R. - zag. początkowe

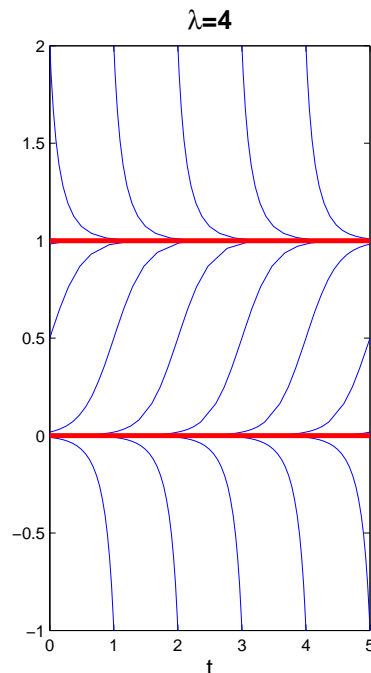
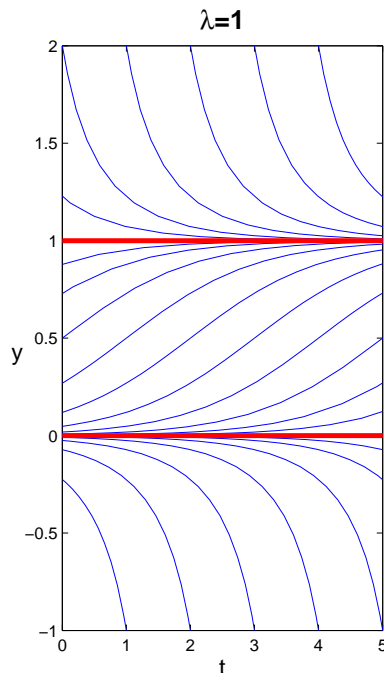
D3. basenem przyciągania punktu y_* nazywa się

$$\{y_0 \in \mathbb{R}^m : y(t) \rightarrow y_* \text{ dla } t \rightarrow \infty\}.$$

□

Przykład

$$(2) \quad y' = \lambda y(1 - y), \quad y(0) = y_0, \quad 0 < \lambda \Rightarrow y(t) = \frac{y_0 e^{\lambda t}}{1 - y_0 - y_0 e^{\lambda t}}$$



● $\frac{df}{dy}(y) = \lambda(1 - 2y)$

● $y(t) \equiv 1$

● $\frac{df}{dy}(1) = -\lambda$

● $y(t) \equiv 0$

● $\frac{df}{dy}(0) = \lambda$

R. R. - metoda numeryczna

$$(3) \quad y_{n+1} = F(y_n), \quad y_0; \quad F : R^m \rightarrow R^m.$$

D1'. y_* jest punktem stałym metody (3) : $y_* = F(y_*)$. \square

D2'. y_* jest lokalnie przyciągającym jeśli istnieje takie jego otoczenie, że jeśli y_n do niego wpadnie, to $y_{n+k} \rightarrow y_*$ dla $k \rightarrow \infty$. \square

Rozp. (3) dla y_n blisko y_* : $y_n = y_* + \epsilon_n$

$$y_{n+1} = y_* + \epsilon_{n+1} = F(y_* + \epsilon_n) \cong F(y_*) + \frac{dF}{dy}(y_*) * \epsilon_n$$

$$\Rightarrow \epsilon_{n+1} = \frac{dF}{dy}(y_*) * \epsilon_n.$$

Warunkiem wystarczającym lokalnego przyciągania punktu y_* jest

$$\rho \left(\frac{dF}{dy}(y_*) \right) < 1.$$

$y' = \lambda y (1 - y)$: jawna metoda Eulera

Metoda: $y_{n+1} = y_n + hf(y_n)$, y_0 – zadane,

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n (1 - y_n); \quad (y_{n+1} = F(y_n)).$$

Punkt stały: $y_* = y_* + \lambda h y_* (1 - y_*)$

$$\Rightarrow y_* = 0, \quad y_* = 1.$$

$$\frac{dF}{dy}(y) = 1 + \lambda h - 2\lambda h y$$

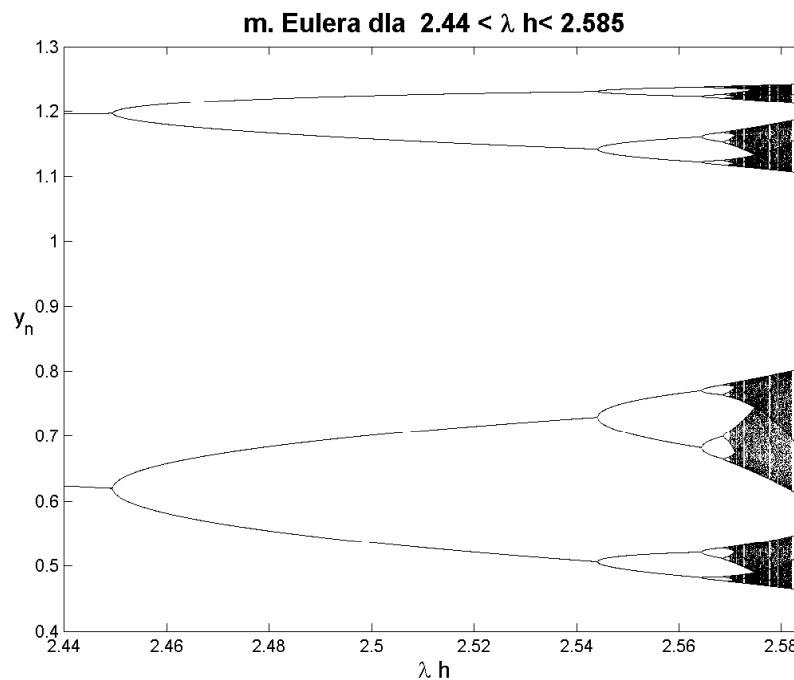
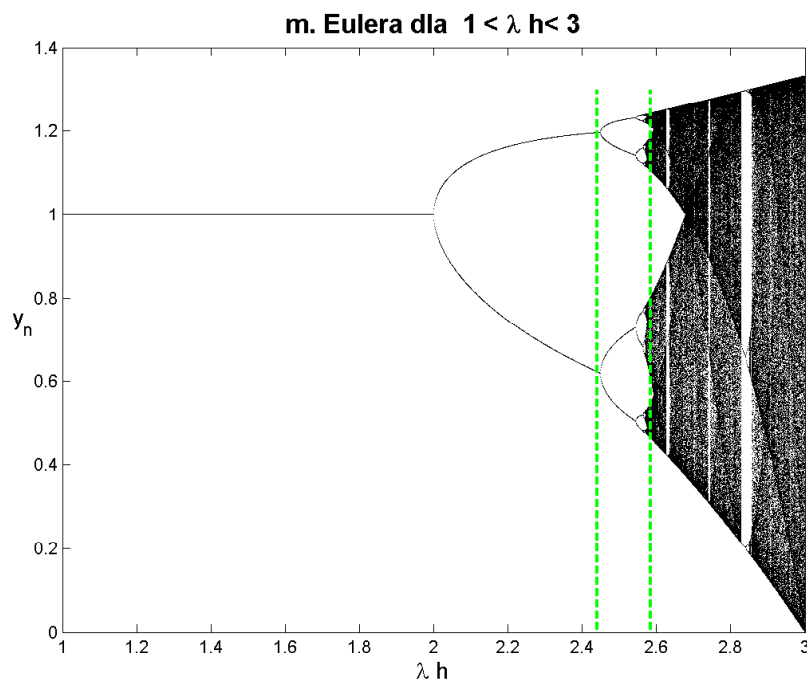
• $\frac{dF}{dy}(0) = 1 + \lambda h > 1,$

• $|\frac{dF}{dy}(1)| = |1 - \lambda h| < 1,$

dla $0 < \lambda h < 2$

• a jeśli $2 < \lambda h$?

$y' = \lambda y (1 - y)$: jawna metoda Eulera



Dla λh bliskiego 2.0 wyznaczane y_n winne być bliskimi 1.0; przyjmijmy $y_n = 1 + \epsilon$. Otrzymujemy:

$$y_{n+1} = F(1 + \epsilon) \cong F(1) + \frac{dF}{dy}(1) * \epsilon = 1 + (1 - \lambda h) * \epsilon \cong 1 - \epsilon$$

punkty $1 + \epsilon$ i $1 - \epsilon$ występują w $\{y_n\}$ na przemian...

$y' = \lambda y (1 - y)$: metoda RK rzędu 2

Metoda: $k_1 = f(y_n)$, $k_2 = f(y_n + 0.5hk_1)$, $y_{n+1} = y_n + hf(k_2)$.

Dla R.R. (2) otrzymujemy wzór $y_{n+1} = F(y_n)$ w postaci

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n \left(1 + \frac{1}{2} \lambda h - \frac{1}{2} \lambda h y_n \right) \left(1 - y_n \left(1 + \frac{1}{2} \lambda h \right) + \frac{1}{2} \lambda h y_n^2 \right)$$

i równanie punktu stałego

$$0 = \lambda h y_* \left(1 + \frac{1}{2} \lambda h (1 - y_*) \right) \left((1 - y_*) \left(1 - \frac{1}{2} \lambda h y_* \right) \right).$$

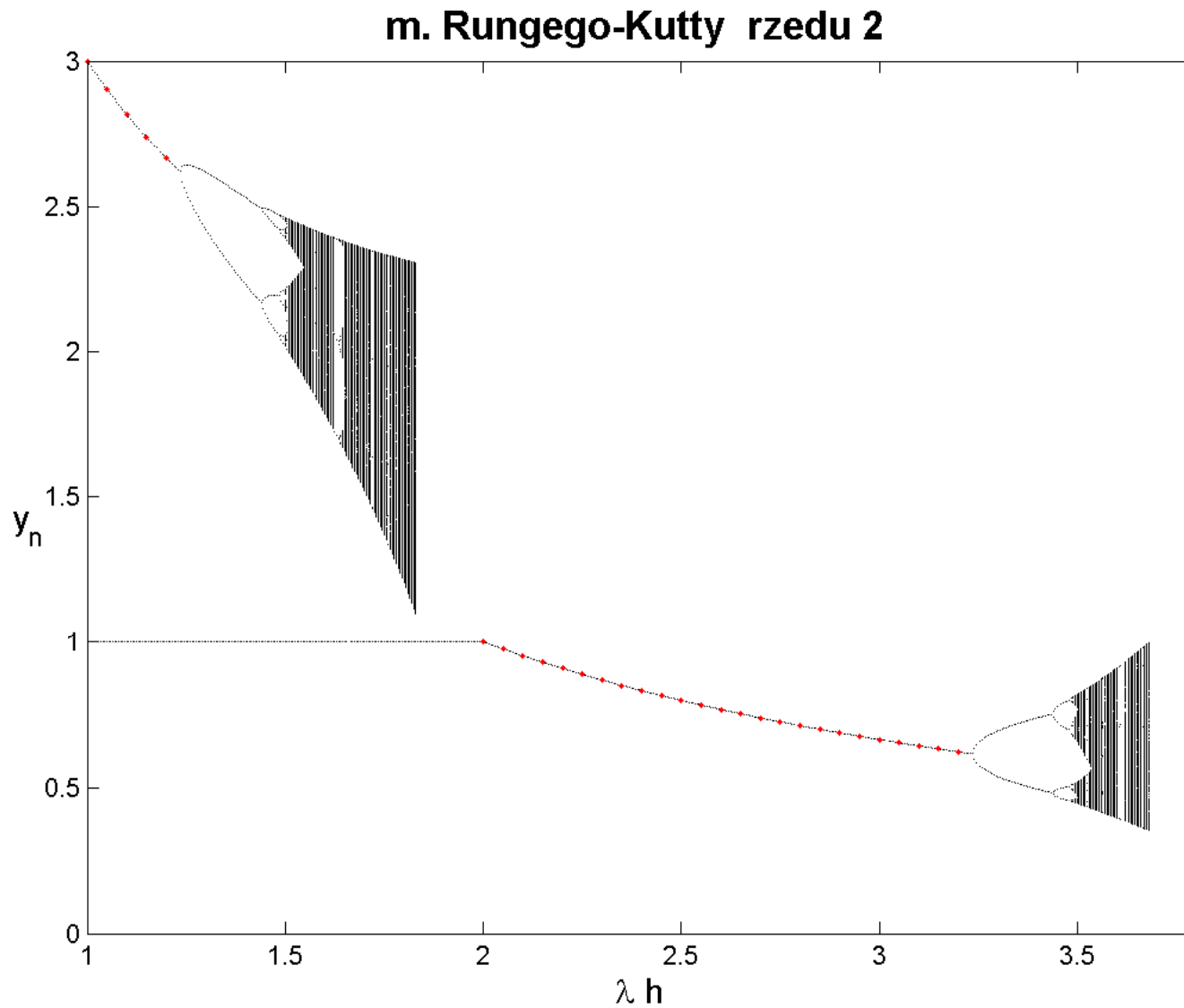
● $y_* = 0$, $\frac{dF}{dy}(y_*) = 1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2$, nie przyciąga,

● $y_* = 1 + \frac{2}{\lambda h}$, $\frac{dF}{dy}(y_*) = 1 - \frac{\lambda h(\lambda h + 2)}{2}$, $0 < \lambda h < -1 + \sqrt{5}$,

● $y_* = 1$, $\frac{dF}{dy}(y_*) = 1 - \lambda h$, $0 < \lambda h < 2$,

● $y_* = \frac{2}{\lambda h}$, $\frac{dF}{dy}(y_*) = 1 - \frac{\lambda h(\lambda h - 2)}{2}$, $2 < \lambda h < 1 + \sqrt{5}$.

$y' = \lambda y (1 - y)$: metoda RK rzędu 2



$y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n)$: m. iteracyjna

(3) $y_{n+1} = F(y_n), \quad y_0; \quad F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m.$

Model Verhulsta (1845)

(4) $y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n), \quad y_0 - \text{zadane}, \quad 0 < \lambda < 4.$

Równanie punktu stałego

$$y_* = \lambda y_* (1 - y_*)$$

● $y_* = 0 \quad F'(0) = \lambda,$

● $y_* = 1 - \frac{1}{\lambda} \quad F'(1 - \frac{1}{\lambda}) = 2 - \lambda,$

zatem

● $0 < \lambda \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \{0\} \quad - \text{przyciągający},$

● $1 < \lambda \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \{1 - \frac{1}{\lambda}\} \quad - \text{przyciągający},$

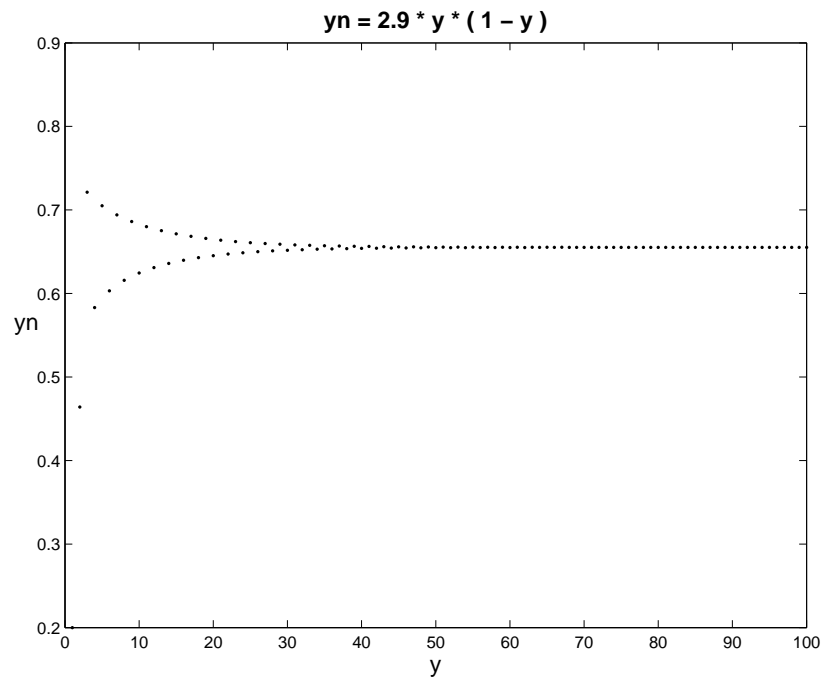
● $3 < \lambda \quad \Rightarrow \quad - \text{nie ma punktów przyciągających.}$

$y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n) : m. \text{ iteracyjna}$

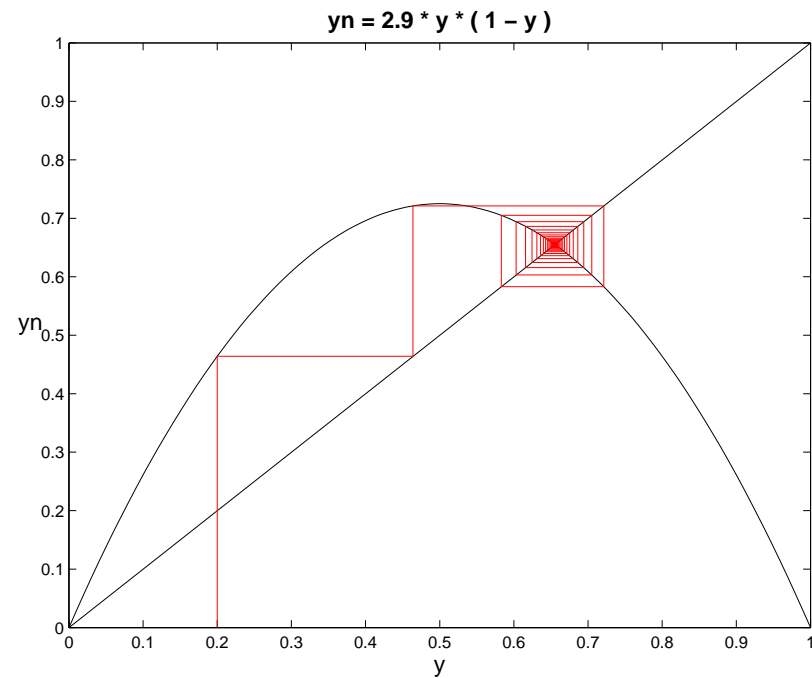
Niech

(4) $y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n)$, $0 < \lambda < 4$, y_0 - zadane.

Ilustracje dla $\lambda = 2.9$ i $y_0 = 0.2$



n



$y_{n+1} = F(y_n)$: m. iteracyjna

- (R^m, F) - układ dynamiczny z czasem dyskretnym.
- Wytworzony ciąg $\{y_n\}$ - trajektoria punktu y_0 ,
np. zapis: $y_0, F(y_0), F^2(y_0), F^3(y_0), \dots$

D4. Jeśli istnieje liczba naturalna $p \geq 2$ i punkt y_0 takie, że

$$y_0 = F^p(y_0) \quad \wedge \quad y_0 \neq F^k(y_0) \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, p-1,$$

to y_0 nazywamy **punktem okresowym z minimalnym okresem p** .

D5. Wtedy p -elementowy podciąg $y_0, F(y_0), \dots, F^{p-1}(y_0)$
nazywa się **okresową orbitą punktu y_0** .

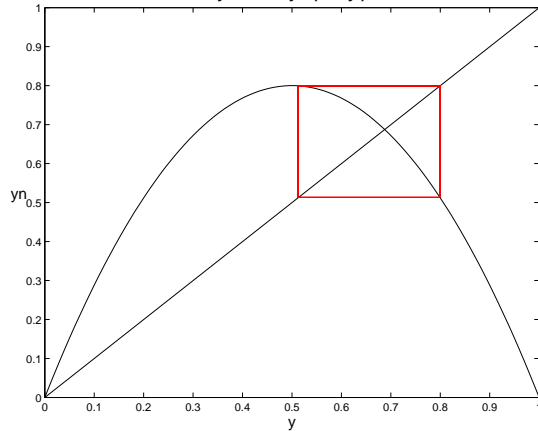
D6. Zbiór $I \subset R^m$ nazywa się **zbiorem niezmienniczym układu dynamicznego (R^m, F)** jeśli $F(I) = I$.

Zbiory niezmiennicze (np. pkty stałe, orbity,...)
jeśli przyciągają - to **atraktory**, jeśli odpychają - to **repelery**.

$y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n) : m. \text{ iteracyjna}$

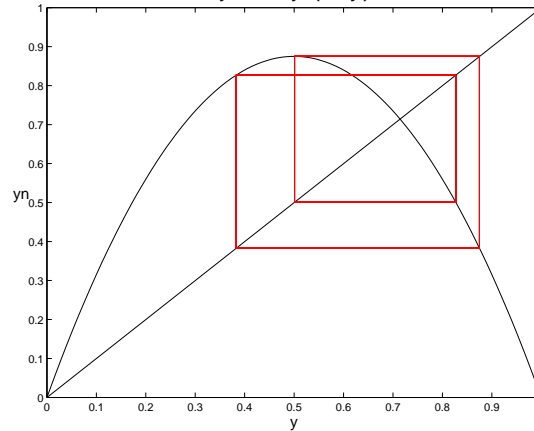
$\lambda = 3.2$

$y_n = 3.2 * y * (1 - y)$



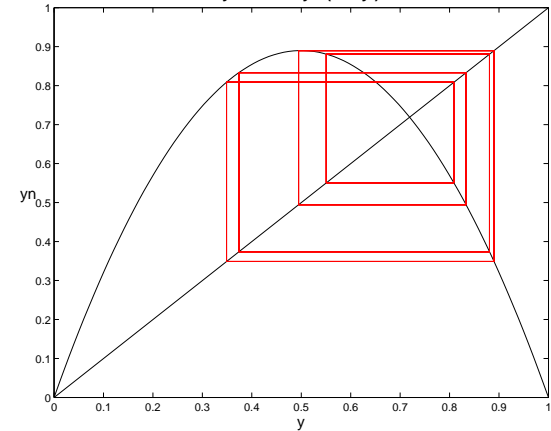
$\lambda = 3.5$

$y_n = 3.5 * y * (1 - y)$



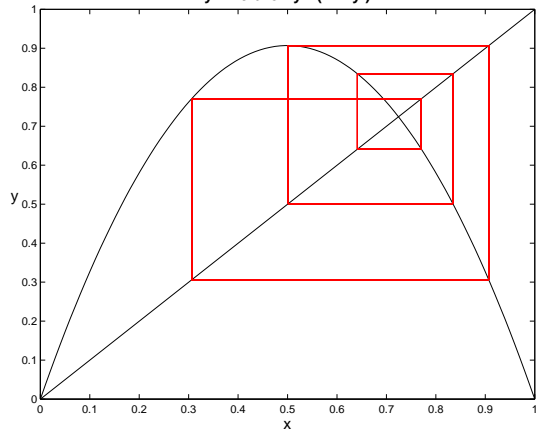
$\lambda = 3.56$

$y_n = 3.56 * y * (1 - y)$



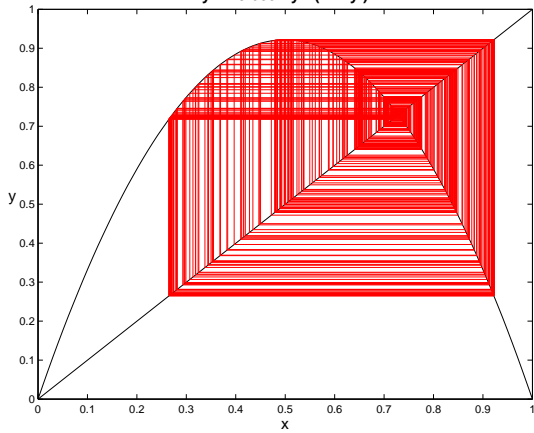
$\lambda = 3.628$

$y_n = 3.628 * y * (1 - y)$



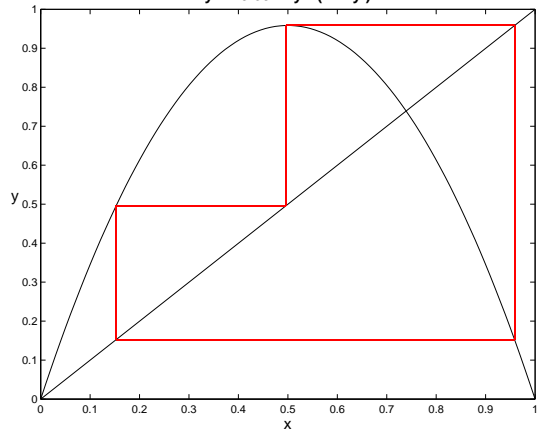
$\lambda = 3.688$

$y_n = 3.688 * y * (1 - y)$



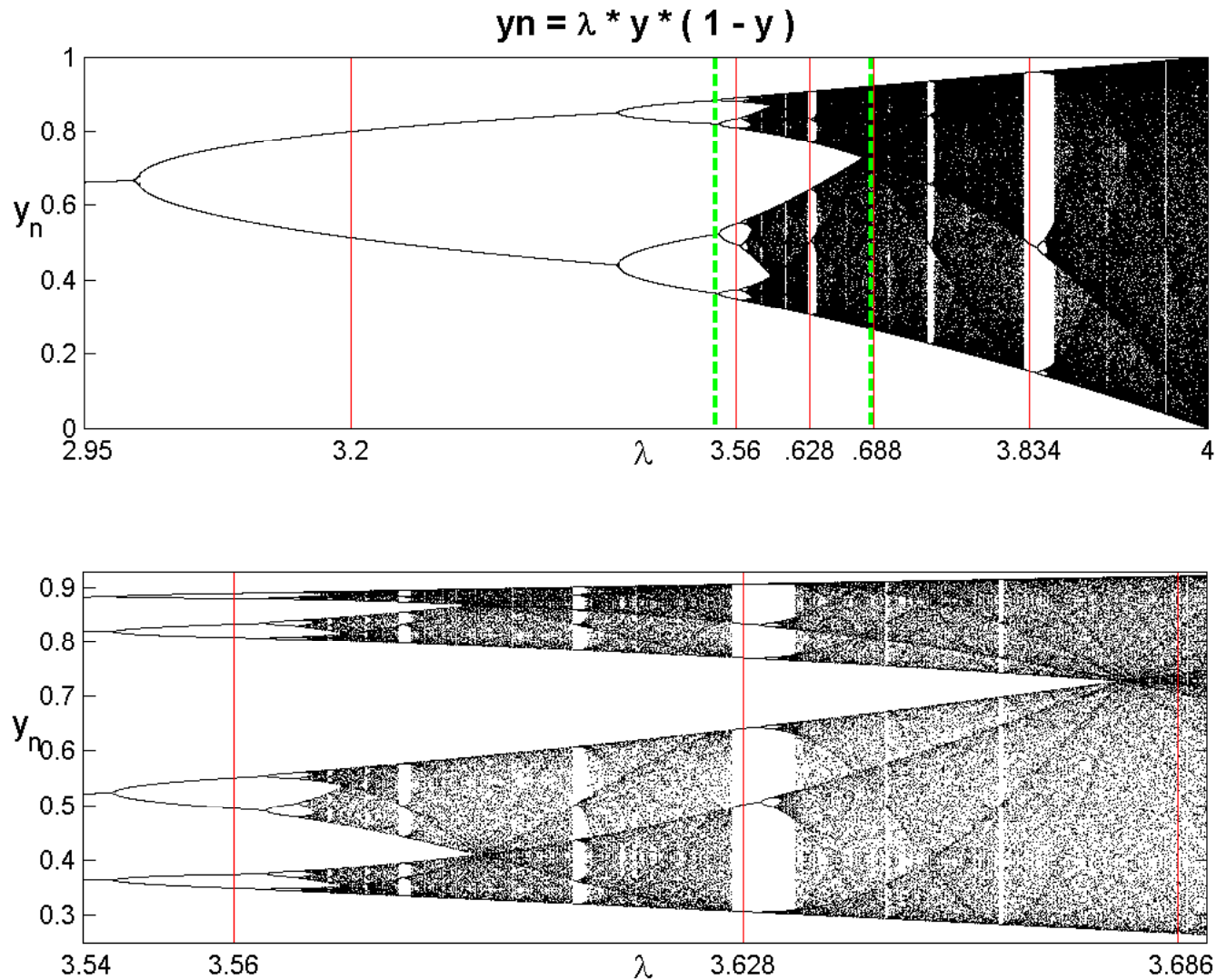
$\lambda = 3.834$

$y_n = 3.834 * y * (1 - y)$



$y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n)$: m. iteracyjna

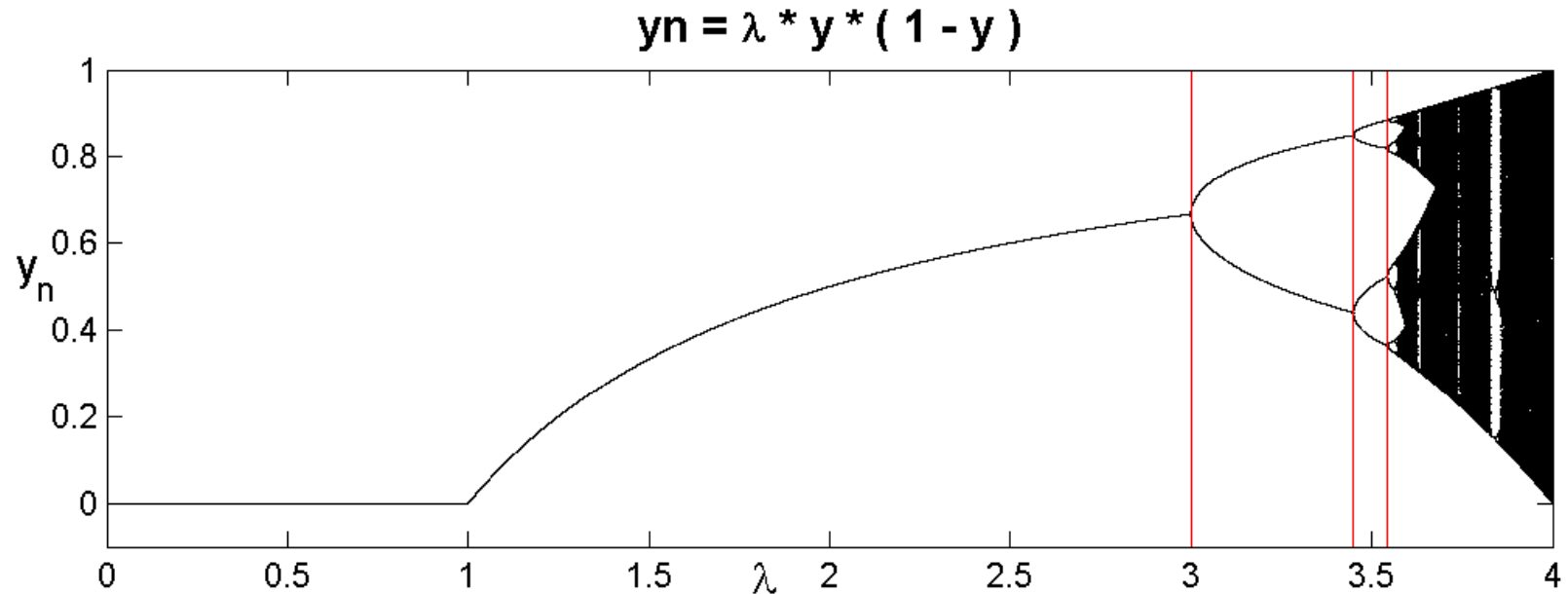
Zjawisko podwajania okresu orbit



Historia

- (1845) **Pierre Francois Verhulst**
 - badał wzrost populacji w ograniczonym środowisku,
- (1920) **Gaston Maurice Julia** (3.02.1893 - 19.03.1978)
 - układy dynamiczne, zbiory Julii,
- (1964) **Aleksander Nikołajewicz Szarkowski** (7.12.1936 Kijów)
 - Tw. dla $F : R \rightarrow R$,
- ● **Edward Norton Lorenz** (23.05.1917 - 16.04.2008)
 - Chaos theory, Lorenz attractor, Butterfly effect (1969),
- ● **Benoît B. Mandelbrot** (20.11.1924 Warszawa)
 - (1975-1989) geometria fraktalna = "workable geometric middle ground between the excessive geometric order of Euclid and the geometric chaos of general mathematics",
- (1975) **Mitchell Jay Feigenbaum** (19.12.1944)
 - teoria chaosu, (1978) opisał przykłady podając stałą,
- (1980) **Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann i Oscard Lanford III**
 - podali pełny dowód dla stałej Feigenbauma.

$y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n)$: m. iteracyjna



| k | λ_k | $\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$ | k | λ_k | $\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$ |
|---|-------------|---|---|-------------|---|
| 1 | 3.0 | | 5 | 3.568759 | 4.664523 |
| 2 | 3.449490 | 4.751479 | 6 | 3.569692 | 4.688442 |
| 3 | 3.544090 | 4.656199 | 7 | 3.569891 | 4.627906 |
| 4 | 3.564407 | 4.668428 | 8 | 3.569934 | |

$\lambda_\infty = 3.569945\dots$

st. Feigenbauma = 4.6692016...

$y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_n)$: m. iteracyjna

- **Twierdzenie Szarkowskiego** dotyczące występowania punktów okresowych dla ciągłych funkcji prostej rzeczywistej (1964):

Niech $f : I \rightarrow R$ będzie funkcją ciągłą, a $I \subset R$ to domknięty odcinek lub cała prosta R . Jeśli f ma punkt okresowy o okresie k oraz $k \triangleleft l$ w porządku Szarkowskiego, to f ma punkt okresowy o okresie l .

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & \triangleleft & 5 & \triangleleft & 7 & \triangleleft & \dots \\ 3 * 2 & \triangleleft & 5 * 2 & \triangleleft & 7 * 2 & \triangleleft & \dots \\ 3 * 2^2 & \triangleleft & 5 * 2^2 & \triangleleft & 7 * 2^2 & \triangleleft & \dots \\ & & & & \dots & & \\ \dots & \triangleleft & 2^2 & \triangleleft & 2^1 & \triangleleft & 1 \end{array}$$

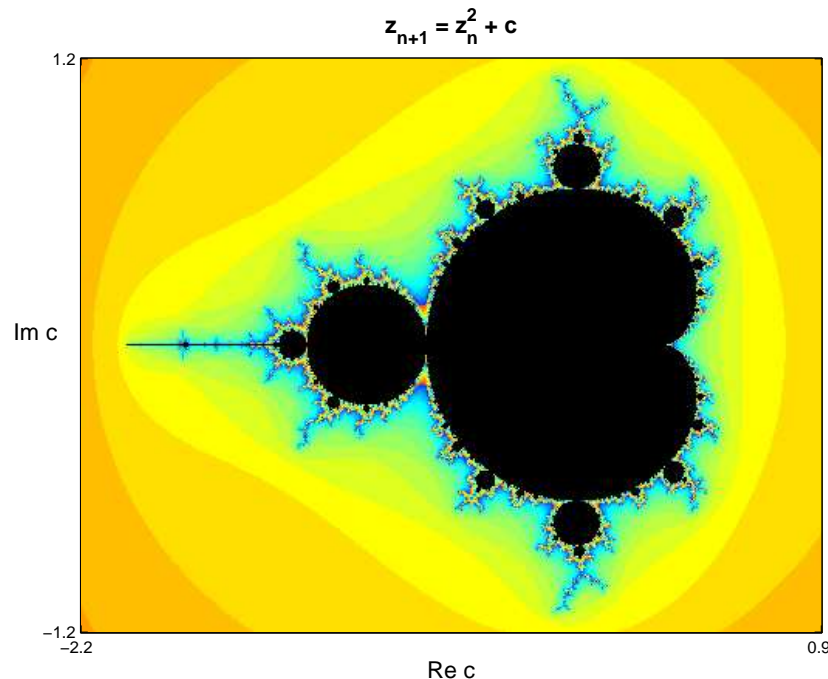
- **Wniosek:** dla rozpatrywanej funkcji iteracyjnej istnienie orbity stałej o okresie 3 wymusza istnienie orbit stałych o wszystkich innych możliwych okresach występujących w ciągu liczb naturalnych z uporządkowaniem Szarkowskiego.

$z_{n+1} = z_n^2 + c$: żuk Mandelbrota

Na płaszczyźnie zespolonej C pracujemy z przekształceniem

$$z_{n+1} = F_c(z_n) \quad \text{gdzie} \quad F_c(z) \equiv z^2 + c.$$

Na rysunku czarny punkt c oznacza, że wygenerowany ciąg $\{z_n\}$ jest ograniczony. Inne kolory oznaczają nieograniczoność ciągu oraz informują o liczbie wykonanych iteracji.



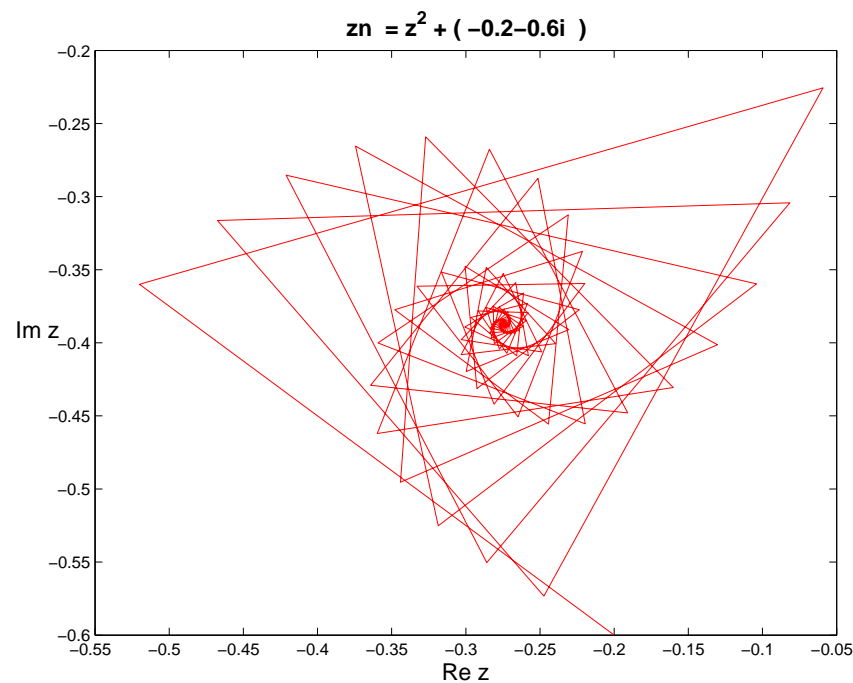
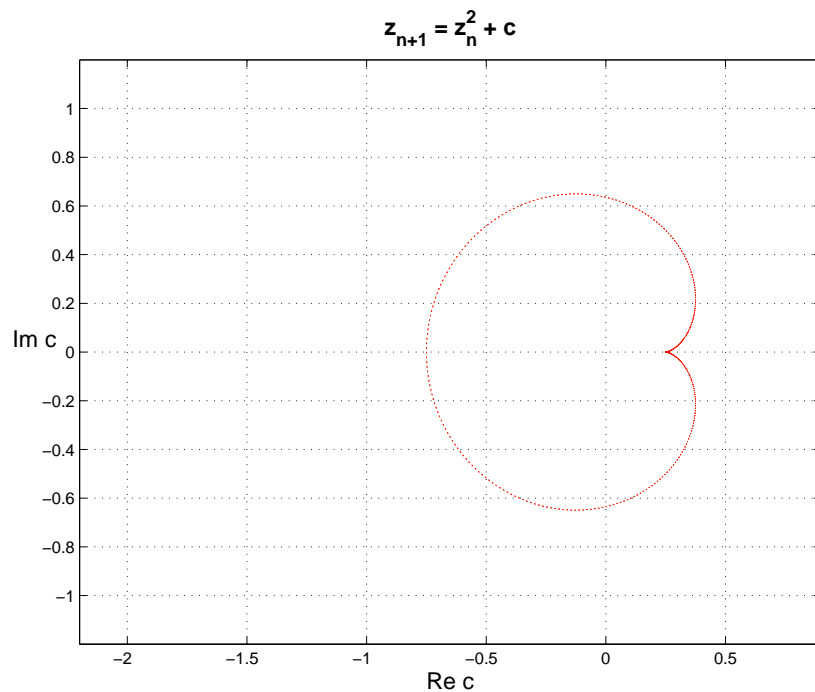
$z_{n+1} = z_n^2 + c$: żuk Mandelbrota

Czy $F_c(z)$ posiada punkty stałe? Przyciągające? Orbity?

$$z_* = z_*^2 + c \wedge |F'_c(z)| < 1 \quad \Rightarrow \quad c = z_* - z_*^2 \wedge |z_*| < \frac{1}{2}$$

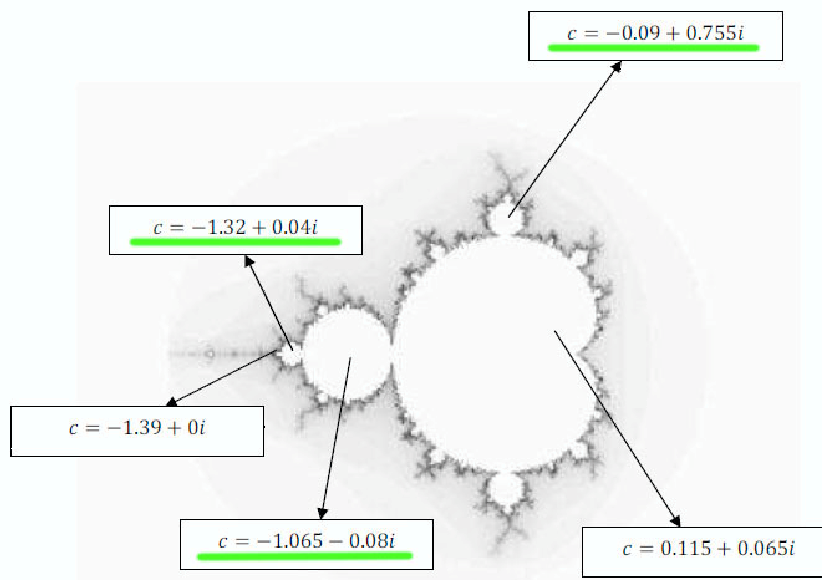
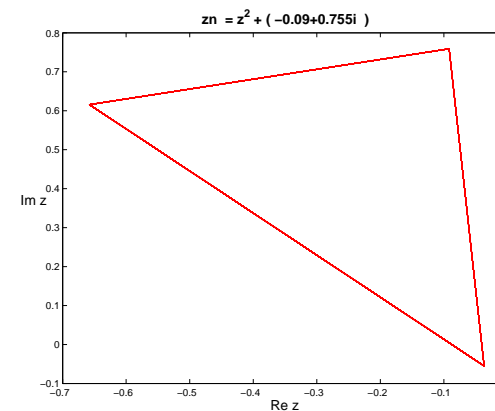
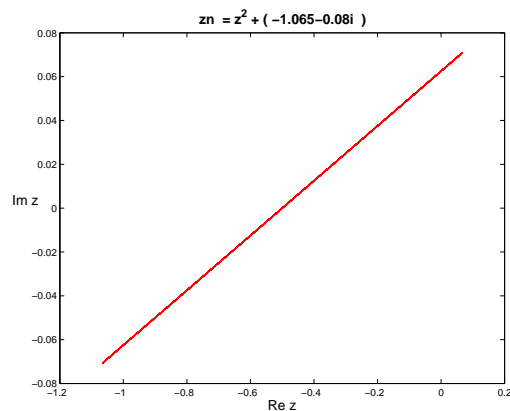
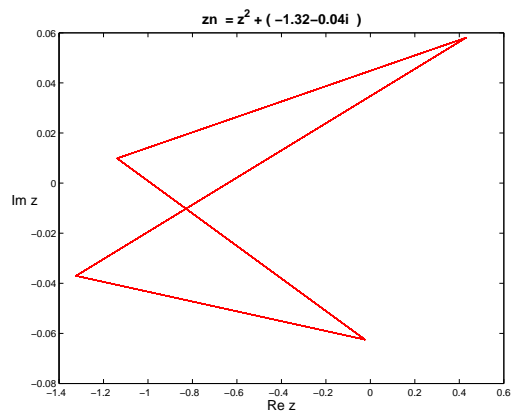
brzeg zbioru zawierającego punkty stałe:

$$\left\{ c : c = \frac{1}{2}e^{2\pi\theta i} - \frac{1}{4}e^{4\pi\theta i} \right\}.$$



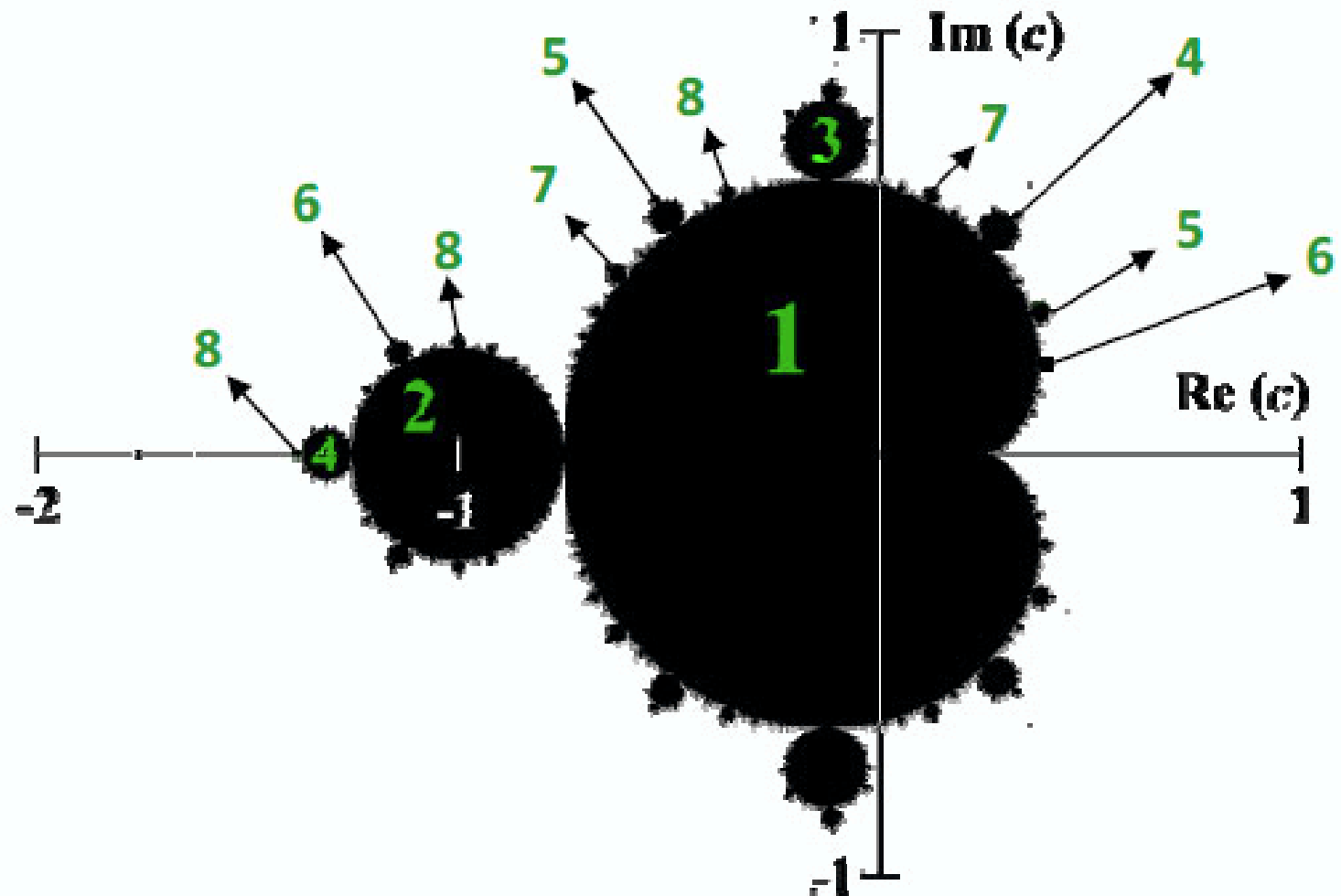
$z_{n+1} = z_n^2 + c$: żuk Mandelbrota

Otrzymujemy orbity okresowe



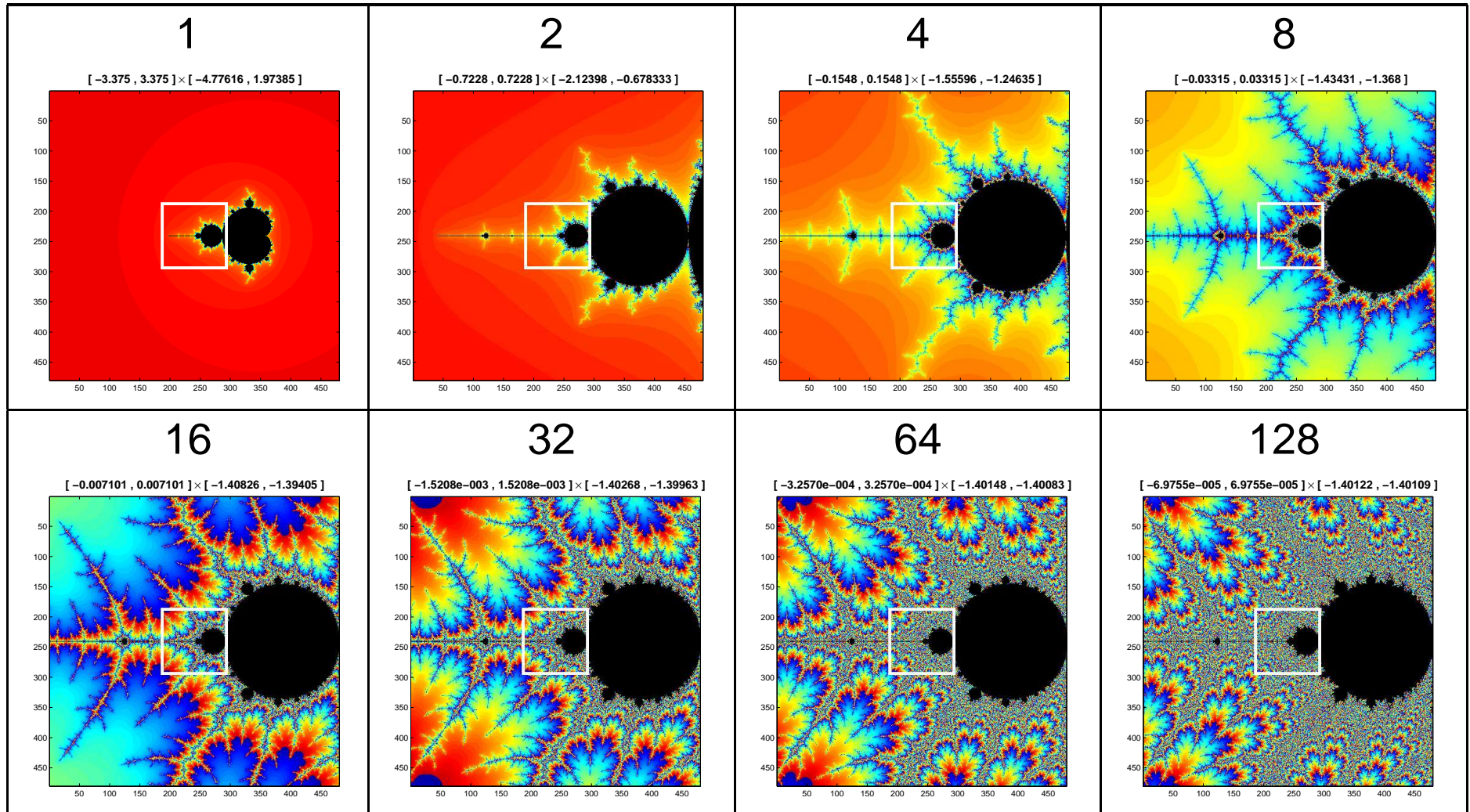
$z_{n+1} = z_n^2 + c$: żuk Mandelbrota

Okresy orbit - rozmaite miejsca wyboru parametru c



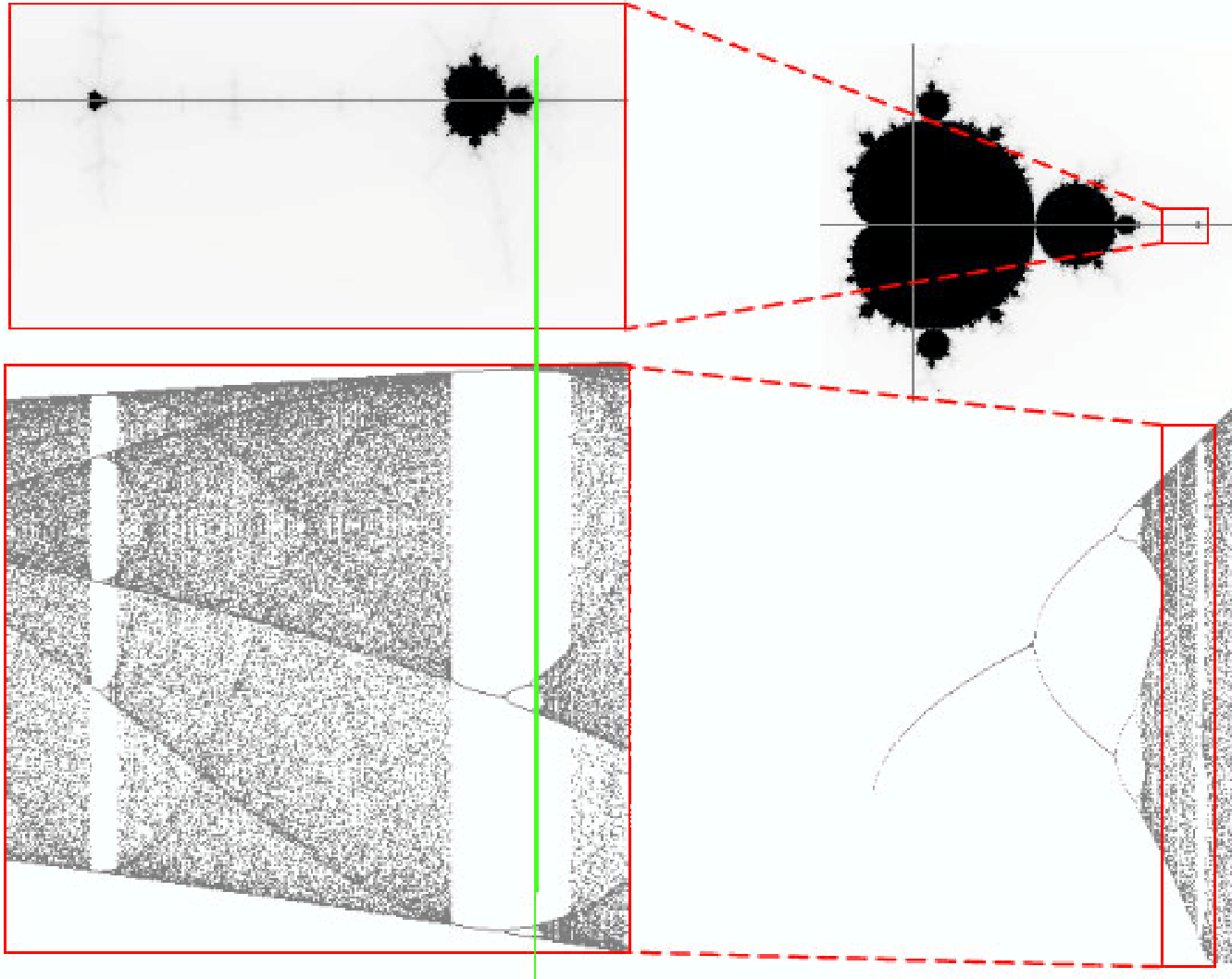
F: $\delta = 4.66920160910299067185320283\dots$

Powiększamy żuka Mandelbrota za pomocą stałej Feigenbauma



F: $\delta = 4.66920160910299067185320283\dots$

Po przeskalowaniu...



dziękuję...

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

