Wykład 9: Ciągi liczbowe

1 Podstawowe definicje

1. ***Ciągiem liczbowym nieskończonym*** albo krótko ***ciągiem*** nazywamy funkcję $a : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$. □
2. Kolejne wartości funkcji a : $a(1), a(2), a(3), \ldots$ nazywamy ***wyrazami ciągu*** i oznaczamy: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ □
   Same ciągi będziemy oznaczać: a, b, c lub $\{a_n\}$ lub $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Stosowane jest również oznaczenie (a_n).
3. Wyraz a_n nazywamy ***wyrazem ogólnym ciągu*** $\{a_n\}$. □
4. Ciąg o wyrazach $b_k = a_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < ...)$ nazywamy ***podciągiem ciągu*** $\{a_n\}$ i oznaczamy $\{a_{n_k}\}$. □
5. Ciąg nazywamy:

   słabo rosnącym lub ***niemalejącym*** jeśli $a_n \leq a_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
   słabo malejącym lub ***nierosnącym*** jeśli $a_n \geq a_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
   ściśle rosnącym lub ***rosnącym*** jeśli $a_n < a_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
   ściśle malejącym lub ***malejącym*** jeśli $a_n > a_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
   monotonicznym jeśli jest ciągiem ***rosnącym*** lub ***malejącym***,
   słabo monotonicznym jeśli jest ciągiem ***nierosnącym*** lub ***niemalejącym***,
   stałym jeśli jego wszystkie wyrazy są równe, □
   ograniczonym z góry jeśli istnieje liczba M taka, że $a_n \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
   ograniczonym z dołu jeśli istnieje liczba m taka, że $a_n \geq m$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
   ograniczonym jeśli jest on ograniczony z góry i z dołu, □
   inaczej: jeśli istnieje liczba M taka, że $|a_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,
   nieograniczonym jeśli nie jest on ograniczony z góry lub z dołu, □
   arytmetycznym jeśli istnieje taka liczba r, zwana ***różnicą***, że $a_{n+1} = a_n + r$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
   geometrycznym jeśli istnieje taka liczba $q \neq 0$, zwana ***ilorazem***, że $a_{n+1} = a_n * q$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, □
6. **Uwaga:** pewne własności ciągu mogą być prawdziwe ***od pewnego miejsca***, tzn. dla $n \geq N$ np. monotoniczność. Mówimy wtedy, że ***prawie wszystkie wyrazy ciągu*** posiadają rozważaną własność.
   Pewne własności można wykorzystać (badać) dla ciągów o wyrazach zespolonych...
7. **Przykłady:**

   (a) Rozp. ciąg geometryczny $\{q^n\}$ dla $q > 1$:
   $$q^n = [1 + (q-1)]^n \geq 1 + n(q-1) > n(q-1).$$
   (b) Teraz ciąg geometryczny $\{q^n\}$ dla $0 < q < 1$:
   $$\frac{1}{q} > 1 \implies \left(\frac{1}{q}\right)^n > n\left(\frac{1}{q} - 1\right) \implies q^n < \frac{1}{n}\frac{q}{1-q}.$$

2 Działania na ciągach

suma: $c = a + b$: $c_n = a_n + b_n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,

różnica: $c = a - b$: $c_n = a_n - b_n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,

iloczyn: $c = a * b$: $c_n = a_n * b_n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,

iloraz: $c = a / b$: $c_n = a_n / b_n$ $(b_n \neq 0)$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,

iloczyn przez liczbę: $b = \alpha * a$: $b_n = \alpha * a_n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,

kombinacja liniowa: $c = \alpha * a + \beta * b$: $c_n = \alpha * a_n + \beta * b_n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,

3 Granice ciągów

Def. Liczbę rzeczywistą g nazywamy ***granicą ciągu*** $\{a_n\}$ jeżeli $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}_1}\ \forall_{n>N}\ \ |a_n - g| < \epsilon\,.$ □

Def. Ciąg mający granicę nazywamy ***ciągiem zbieżnym*** do tej granicy i piszemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad \text{lub} \qquad \lim a_n = g \qquad \text{lub} \qquad a_n \longrightarrow g\,.$$ □

Uwaga. Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g ***witw*** gdy ciąg $\{a_n - g\}$ ma granicę 0.

Def. Ciąg nie mający granicy nazywamy ***ciągiem rozbieżnym***. □
Rozważając liczby rzeczywiste możemy mówić o rozbieżności do $+\infty$ albo o rozbieżności do $-\infty$.
Rozważając ciągi zespolone $\{z_n\}$ mówimy tylko o rozbieżności do ∞ gdy $|z_n| \to \infty$.
Dla przykładu definicja może być następująca:

Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest ***rozbieżny do*** $+\infty$ jeśli $\forall_{\mathbb{R}\ni M>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}_1}\ \forall_{\mathbb{N}_1\ni n>N}\ \ a_n > M\,.$ □

Tw. 1. Ciąg zbieżny jest ograniczony. □

Tw. 2. Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy. □

Tw. 3. Podciąg ciągu rozbieżnego może być zbieżny. □

Tw. 4. $a_n \to \lim a_n\ \wedge\ b_n \to \lim b_n\ \wedge\ \forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ a_n \le b_n \implies \lim a_n \le \lim b_n\,.$ □

Tw. 5. (tw. o trzech ciągach) $a_n \to g\ \wedge\ c_n \to g\ \wedge\ \forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ a_n \le b_n \le c_n \implies b_n \to g\,.$ □

Def. Liczbę s nazywamy ***punktem skupienia ciągu*** $\{a_n\}$ jeśli w każdym otoczeniu $(s-\epsilon,\ s+\epsilon)$ leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. □

Tw. 6. (aksjomat ciągłości) Każdy niemalejący i ograniczony z góry ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny. □

Tw. 7. (Bolzano-Weierstrass) Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych posiada podciąg zbieżny. □

Przykłady

(a) $a > 0 \implies \lim \sqrt[n]{a} = 1$ **(b)** $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ **(c)** $\alpha > 0 \wedge q > 1 \implies q^n \gg n^\alpha$ **(d)** $\dfrac{\frac{n^2-1}{n^2+1}-1}{\frac{n+1}{n-1}-1} \longrightarrow 0$

4 Zadania

1. Zbadać własności ciągów:

   (a) $a_n = 1/n$ **(b)** $a_n = 2 + |\cos n|$ **(c)** $a_n = 2 + |\cos n\pi|$ **(d)** $a_n = \frac{10^n}{n!}$ **(e)** $\frac{n^{10}}{10^n}$

2. Zbadać własności ciągów:

   (a) $a_n = (-1)^{n+1}$ **(b)** $a_n = \frac{3n^2-17n-100}{16-n^2}$ **(c)** $a_n = \frac{1*3*\ldots*(2n-1)}{n!}$ **(d)** $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$

3. Udowodnić **Tw. 2**.

4. Udowodnić, że ciąg zbieżny nie może mieć dwóch różnych granic.

5. Poprawić i udowodnić: $(\forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ a_n < A)\ \wedge\ a_n \longrightarrow g \implies g < A\,.$

6. Obliczyć granice:

   (a) $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ **(b)** $\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}$ **(c)** $\frac{\frac{n+1}{n-1}-1}{\frac{n^2-1}{n^2+1}-1}$ **(d)** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **(e)** $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

7. Udowodnić, że iloczyn ciągu ograniczonego przez ciąg zbieżny do zera jest ciągiem zbieżnym do zera.

* * *