Wykład 8: LICZBY RZECZYWISTE, LICZBY ZESPOLONE

1 Podstawowe definicje

1. ***Działaniem*** k***-argumentowym, określonym na zbiorze*** A nazywamy odwzorowanie $D: A^k \to A$. □
   Oznaczenia: $D(a_1, ...a_k)$, $a_1 D a_2$, a stosując jakiś symbol, np. $a + b$.
2. Jeśli działań jest więcej: $D_1 : A^{k_1} \to A$,..., $D_p : A^{k_p} \to A$, to definiujemy ***algebrę***: ozn. $< A, D_1, ..., D_p >$. □
3. Zbiór nazywamy ***zbiorem przeliczalnym*** jeżeli można wszystkie jego elementy "ponumerować" elementami zbioru $\mathbb{N}_1$. □
4. ***Kresem górnym zbioru*** A ***w zbiorze*** B (zb. A jest ograniczony z góry oraz $A \subseteq B$) jest liczba, która jest najmniejszym ograniczeniem od góry zbioru A i która sama należy do zbioru B. ozn. $sup\, A$ □
5. ***Kresem dolnym zbioru*** A ***w zbiorze*** B (zb. A jest ograniczony z dołu oraz $A \subseteq B$) jest liczba, która jest największym ograniczeniem od dołu zbioru A i która sama należy do zbioru B. ozn. $inf\, A$ □

2 Liczby

2.1 Naturalne (*Natural*) *ozn.* $\mathbb{N}$

wygodne: $\mathbb{N}_1 = \{a \in \mathbb{N} : a \geq 1\}$,

działania: $+, *$,

własności działań: *przemienność, łączność, rozdzielność,*

2.2 Całkowite (*Zahl*) *ozn.* $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2, ...\}$

działania: $+, *$,

własności działań: *przemienność, łączność, rozdzielność,*

element zerowy względem dodawania 0,

element przeciwny do a**:** $-a$ (odwrotny względem dodawania): $\forall\, x \in \mathbb{Z}\ \exists\, y \in \mathbb{Z}\ \ x + y = 0$,

(grupa przemienna względem dodawania).

2.3 Wymierne (*Quotient*) *ozn.* $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}\ \wedge\ q \in \mathbb{N}_1 \right\}$

działania: $+, *$,

własności działań: *przemienność, łączność, rozdzielność,*

element zerowy względem dodawania 0,

element przeciwny do x**:** $-x$ (odwrotny względem dodawania): $\forall\, x \in \mathbb{Z}\ \exists\, y \in \mathbb{Z}\ \ x + y = 0$,

(grupa przemienna względem dodawania),

jedynka względem mnożenia: 1,

element odwrotny względem mnożenia do x (dla $x \neq 0$): $\forall\, x \in \mathbb{Z} : x \neq 0\ \exists\, y \in \mathbb{Z}\ \ x * y = 1$,

(grupa przemienna względem mnożenia),

algebra $< \mathbb{Q}, +, * >$ **nazywa się *ciałem.***

inne działania: moduł, potęga, pierwiastek arytmetyczny, logarytm, (szczegóły na wykładzie)

Aksjomat Archimedesa $\forall\, x \in \mathbb{Q}\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ n > x$,

2.4 Rzeczywiste (*Real*) *ozn.* $\mathbb{R}$

Definicje

1. liczba rzeczywista jest określona przez *ciąg liczb wymiernych, które ją przybliżają*:

$$\sqrt{2} = \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \ldots$$

2. jest to liczba, która posiada nieskończone rozwinięcie dziesiętne,

3. liczba rzeczywista może być interpretowana jako punkt na linii prostej (osi liczbowej).

Tw. 1 Liczba rzeczywista jest liczbą wymierną wt.i.t.wt. gdy posiada rozwinięcie okresowe.
(rozwinięcie skończone traktujemy jako okresowe z okresem równym 0) □

Przykład: Liczby 0.1234567890101112131415..., 0.10100100010000... nie są liczbami wymiernymi.

Tw. 2 Liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalnie wiele. □

Aksjomat kresu Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z góry ma w zbiorze $\mathbb{R}$ kres górny. □

Zasada Dedekinda

przekrój: niech A, B będą takimi niepustymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}$, że $A \cup B = \mathbb{R}$.
Taki rozkład zbioru $\mathbb{R}$ nazywamy ***przekrojem*** jeśli

1. zbiory A i B nie mają punktów wspólnych,

2. dla dowolnych liczb $a \in A$, $b \in B$ zachodzi nierówność $a < b$. □

Tw. 3 jeżeli powyższy rozkład zb. $\mathbb{R}$ jest przekrojem, to zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości:

1. w zbiorze A istnieje liczba największa,

2. w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza. □

przedziały: niech $x < y$. przedziały właściwe: np. $(x, y]$, niewłaściwe: np. (y, ∞), $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Tw. 4 ***(liniowa gęstość zbioru liczb wymiernych)***
W każdym przedziale otwartym $(x, y) \subset \mathbb{R}$, $(x < y)$ leży co najmniej jedna liczba wymierna. □

moduł, część całkowita l. rzeczywistej (entier)

algebra $< \mathbb{R}, +, * >$ **jest *ciałem*.**

2.5 Zespolone (*Complex*) *ozn.* $\mathbb{C}$

1. ***jednostka urojona*** (ozn. $\mathbf{i}$) jest rozwiązaniem równania $x^2 + 1 = 0$, czyli: $\mathbf{i}^2 = -1$ lub $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. □

2. ***liczba zespolona*** $z = x + y\mathbf{i}$: $x, y \in \mathbb{R}$. □

3. ***liczba zespolona sprzężona*** $\overline{z}$ do $z = x + y\mathbf{i}$: $\overline{z} = x - y\mathbf{i}$. □
(d-d. własności sprzężenia $\Longrightarrow$ ćwiczenia)

4. ***moduł liczby zespolonej:*** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. □
(d-d. własności modułu l. zespolonej $\Longrightarrow$ ćwiczenia)

5. ***interpretacja geometryczna liczby zespolonej***

$$z = x + y\mathbf{i} = \sqrt{x^2 + y^2}\,(\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi) = r\,e^{\mathbf{i}\phi}$$

ϕ – kąt wyznaczony z dokładnością do $2k\pi$. Osie układu: ***Re***, ***Im***.

6. **argument główny l. zespolonej:** $Arg(z) = \phi \; : \; 0 \le \phi < 2\pi$. □

7. wzory Moivre'a na mnożenie l. zespolonych: $z_1 = r_1 (\cos\phi_1 + \mathbf{i}\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos\phi_2 + \mathbf{i}\sin\phi_2)$

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) (\cos(\phi_1 + \phi_2) + \mathbf{i}\sin(\phi_1 + \phi_2)) .$$

8. dzielenie, potęgowanie, ...

9. pierwiastek z l. zespolonej

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r (\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)$$

dla $k = 0, 1, \dots n-1$.

(istnieje n różnych n-tych pierwiastków z l. zespolonej $z \neq 0$)

10. algebra $< \mathbb{C}, +, * >$ **jest *ciałem*.**

3 Zadania

1. Udowodnić, że liczbę rzeczywistą z rozwinięciem okresowym można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$: $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}_1$.

2. Udowodnić niewymierność liczb: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$.

3. Zbadać wymierność liczb: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$, $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$, $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

4. Udowodnić, że żadna liczba wymierna nie może być najmniejszym ograniczeniem z góry zb. liczb wymiernych, spełniających nierówność $x^2 < 2$. (inaczej – liczby wymierne nie spełniają aksjomatu kresu)

5. Udowodnić własności sprzężenia l. zespolonej:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ **(b)** $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$ **(c)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(d) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ **(e)** $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}}$ **(f)** $z * \overline{z} = |z|^2$

6. Udowodnić własności modułu l. zespolonej:

(a) $|z| \geq 0$ **(b)** $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ **(c)** $|z| = |\overline{z}|$

(d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **(e)** $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ **(f)** $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$

7. Narysować n-ty pierwiastek z jedynki.

8. Jak zdefiniować za pomocą liczb zespolonych zbiór na płaszczyźnie w postaci koła o promieniu 2 i środku w punkcie $(\pi, 100)$?

9. Dla jakich $z = (x, y)$ spełnione jest równanie

$$\frac{(x-4) + (y-1)\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = 2 - 5\mathbf{i}$$

10. Znaleźć wszystkie liczby zespolone dla których $\overline{z} = z^2$.

11. Kiedy liczba $(x + y\mathbf{i})^2$ jest liczbą:

(a) rzeczywistą **(b)** dodatnią **(c)** ujemną **(d)** urojoną

12. Dane są kolejne wierzchołki równoległoboku: z_1, z_2, z_3. Znaleźć czwarty wierzchołek.

* * *