Wykład 15: Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej, cd.

1 Całka oznaczona

1. **Założenia:** Rozpatrujemy funkcję $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$, określoną na przedziale domkniętym. Oznaczmy przez m, M minimum i maksimum f w $[a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na n podprzedziałów punktami $\{x_i\}$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

oznaczając

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad \text{dla} \qquad i = 1, 2, ..., n\,.$$

2. **Def.** Taki podział oznaczamy przez Δ_n, a wielkość $\delta_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ nazywamy ***średnicą podziału*** Δ_n. □

3. **Def.** Ciąg $\{\Delta_n\}$ nazywamy ***ciągiem normalnych podziałów przedziału*** $[a,b]$ jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. □

4. **Konstrukcja.** W każdym podprzedziale $[x_{i-1}, x_i]$ wybieramy punkt ξ_i. Niech:

$$m_i = \inf\{f(x) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,, \qquad\qquad M_i = \sup\{f(x) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,.$$

Tworzymy sumy:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n, \\ s_n &= m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_n \Delta x_n, \\ S_n &= M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_n \Delta x_n. \end{aligned}$$

Ponieważ $\forall_{1 \le i \le n} \quad m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, więc

$$m(b-a) \;\le\; s_n \;\le\; \sigma_n \;\le\; S_n \;\le\; M(b-a)\,.$$

5. **Interpretacja geometryczna.**

6. **Tw.** Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ograniczona). Wtedy dla dowolnego ***normalnego ciągu podziałów*** istnieją granice skończone

$$\lim_{n\to\infty} s_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} S_n$$

i ***one nie zależą od wyboru ciągu podziałów***. □

7. **Def.** Granice ciągów $\{s_n\}$ i $\{S_n\}$ nazywamy ***całką dolną*** i ***całką górną Darboux*** funkcji f. □

8. **Def.** Jeżeli obie całki Darboux (dolna i górna) mają tę samą wartość, to wartość tę oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

i nazywamy ***całką oznaczoną Riemanna*** funkcji $f(x)$. (Funkcję f nazywamy funkcją ***całkowalną w sensie Riemanna***.) Przedział $[a,b]$ nazywamy ***przedziałem całkowania***, a i b – odpowiednio ***dolną*** i ***górną granicą całkowania***, a funkcję f – ***funkcją podcałkową***. □

9. **Tw.** Każda funkcja ciągła w przedziale $[a,b]$ jest w tym przedziale całkowalna. □

10. **Wniosek.** Każda funkcja ograniczona w przedziale $[a,b]$, której zbiór punktów nieciągłości jest skończony, jest w tym przedziale całkowalna. □

11. **Tw.** Każda funkcja słabo monotoniczna w przedziale $[a,b]$ jest w tym przedziale całkowalna. □

12. Tw. Jeśli funkcje f i g są funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna w $[a,b]$, a C jest liczbą rzeczywistą, to:

- $f+g$ oraz Cf są całkowalne: $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$, $\int_a^b Cf\,dx = C\int_a^b f\,dx$,
- jeśli $f(x) \le g(x)$ w $[a,b]$, to $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$,
- jeśli $c \in [a,b]$, to $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. □

13. Własność. $\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$.

14. Tw. (*o wartości średniej*)

$$f \text{ jest ciągła w } [a,b] \implies \exists_{\xi\in[a,b]} : f(\xi) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx.$$ □

15. Tw. (*drugie twierdzenie o wartości średniej*)

$$f, g \text{ są ciągłe w } [a,b],\quad g(x) \ge 0 \implies \exists_{\xi\in(a,b)} : \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$ □

16. Tw. *Związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną*
Niech f będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna w $[a,b]$. Określmy

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{dla} \qquad a \le x \le b.$$

Wtedy F jest funkcją ciągłą w $[a,b]$, a w każdym punkcie x ciągłości funkcji f posiada pochodną:

$$F'(x) = f(x).$$ □

17. Tw. Niech f będzie funkcją ciągłą w $[a,b]$. Wtedy f posiada funkcję pierwotną F i

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$ □

18. Wniosek. Jeśli funkcje f, g mają ciągłe pochodne w $[a,b]$, to

$$\int_a^b f\,g'\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'\,g\,dx.$$ □

19. Wniosek. Niech: $\phi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$, $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Jeśli ϕ' jest funkcją ciągłą w $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy.$$ □

2 Zastosowania geometryczne całki

1. **Obliczanie wielkości pola ograniczonej figury płaskiej**

Wniosek. Jeśli f jest funkcją ciągłą i nieujemną w $[a,b]$, to pole P obszaru zawartego między wykresem funkcji $y = f(x)$, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, jest równe

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$ □

2. Obliczanie objętości bryły obrotowej (wokół osi OX)

Wniosek. Jeśli f jest funkcją ciągłą w $[a,b]$, to objętość V bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu figury płaskiej ograniczonej wykresem funkcji $y = f(x)$ na odcinku $[a,b]$, osią OX i prostymi $x = a$, $x = b$ wokół osi OX, jest równe

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad \square$$

3. Obliczanie długości łuku krzywej

Wniosek. Jeśli krzywa jest zadana równaniem $y = f(x)$ dla $x \in [a,b]$, a funkcja f ma ciągłą pochodną f', to długość L tego odcinka krzywej jest równa

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \qquad \square$$

4. Obliczanie pola powierzchni bocznej bryły obrotowej

Obracamy wykres funkcji $y = f(x)$ dla $x \in [a,b]$ wokół osi OX $(f(x) \geq 0)$.

Wniosek. Jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną f', to pole S powierzchni bocznej otrzymanej bryły jest równe

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \qquad \square$$

5. Przykład. Należy obliczyć objętość elipsoidy obrotowej, otrzymanej przez obrót wokół osi OX elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Obracamy wokół osi OX krzywą $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ określoną na odc. $[-a,a]$. Otrzymujemy

$$V = \pi b^2 \int_{-a}^{a} 1 - \frac{x^2}{a^2}\,dx = 2\pi b^2 \int_0^a 1 - \frac{x^2}{a^2}\,dx = \frac{4}{3}\pi a b^2\,.$$

3 Całki niewłaściwe

Całka Riemanna została zdefiniowana dla funkcji ograniczonych i określonych na odcinku ograniczonym. Teraz

- funkcja jest całkowana na odc. $[a,b)$, gdzie $b < \infty$ lub $b = \infty$, lub
- funkcja f jest nieograniczona.

1. Def. Założenie: $\forall_{\beta \in (a,b)}$ istnieje całka Riemanna $I(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$.

Jeśli $b = \infty$ lub funkcja f jest nieograniczona na $[a,b)$, oraz istnieje granica $\lim_{\beta \to b} I(\beta)$, to ***granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji*** f **w** $[a,b)$. $\square$

2. Przykład.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \to 0_-} \ln(-x)\,|_{-1}^{a} + \lim_{b \to 0_+} (\ln x)\,|_b^1 = ...?$$

4 Zadania

1. Policzyć pole ograniczonego obszaru wyznaczonego krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$.

2. Policzyć objętość bryły otrzymanej przez obrót krzywej $y = \sin x$ na odc. $[0, \pi]$ wokół osi OX.

3. Obliczyć objętość kuli o promieniu R.

4*. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \ln x$ zadanej na odcinku $[1, 2]$. (Podstawić $t = \sqrt{x^2 + 1}$.)

5. Obliczyć: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$, $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

5. Wyznaczyć funkcję pierwotną dla funkcji $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla} \quad x < 0\,, \\ x^2 & \text{dla} \quad 0 \le x < 1\,, \\ 1 - (x-1)^2 & \text{dla} \quad 1 \le x < 2\,, \\ 0 & \text{dla} \quad 2 \le x\,. \end{cases}$

Uzasadnić, że to da się zrobić.

* * *