Wykład 14: Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

1 Całka nieoznaczona

1. **Założenie:** rozpatrujemy funkcję $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$, określoną na przedziale otwartym D.
(*D* może być przedziałem nieskończonym.)

2. **Def.** Każdą funkcję F różniczkowalną w D i spełniającą warunek

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in D$$

nazywamy ***funkcją pierwotną*** funkcji f lub ***całką nieoznaczoną*** funkcji f. Funkcję pierwotną oznaczamy:

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{lub} \qquad \int f\,. \qquad \square$$

3. **Uwaga.** Funkcja pierwotna nie jest określona jednoznacznie. Funkcja $F + C$ dla $C \in \mathbb{R}$ jest również funkcją pierwotną. Zatem ogólnie piszemy:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,. \qquad \square$$

4. **Tw.** Jeśli F, G są funkcjami pierwotnymi dla funkcji f, to ich różnica $F - G$ jest funkcją stałą. $\square$

5. **Funkcje pierwotne dla funkcji elementarnych**

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$	Warunki
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1 \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R}_+$
e^x	e^x	
a^x	$\frac{1}{\ln\, a}\,a^x$	$a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\,\lvert x\rvert$	$x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$x \neq k\,\pi$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in (-1,\, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

6. **Tw.** Niech F, G będą funkcjami pierwotnymi dla funkcji f, g na D. Wówczas

$$\forall_{\alpha,\,\beta\,\in\mathbb{R}} \qquad \alpha F + \beta G \qquad \text{jest funkcją pierwotną dla} \qquad \alpha f + \beta g$$

i zachodzi równość

$$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g\,. \qquad \square$$

2 Metody całkowania

1. Całkowanie przez części

Tw. Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi w D i niech fg' posiada funkcję pierwotną. Wówczas funkcja $f'g$ posiada funkcję pierwotną i zachodzi wzór:

$$\int f' g \;=\; f g \;-\; \int f g' . \qquad \square$$

Przykłady.

$$\int \ln x \,, \qquad \int e^x \sin x$$

2. Całkowanie przez podstawienie

Tw. Niech:

F jest funkcją pierwotną funkcji f,

$f \;:\; (a,b) \;\to\; \mathbb{R}$,

$\phi \;:\; (\alpha,\beta) \;\to\; (a,b)$ jest funkcją różniczkowalną.

Wówczas funkcją pierwotną dla $(f \circ \phi)(x)\phi'(x)$ jest $(F \circ \phi)(x)$ i zachodzi wzór:

$$\int f(\phi(x))\, \phi'(x) dx \;=\; F(\phi(x)) . \qquad \square$$

Przykłady.

$$\int \frac{dx}{ax+b} \,, \qquad \int x\sqrt{1+x^2}\, dx \,, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt{x})}$$

3. Wzory rekurencyjne (przykład)

dla $n \geq 2$**:**

$$\int \sin^n x\, dx \;=\; \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx \;=\; \int (-\cos x)' \cdot \sin^{n-1} x\, dx \;=$$

$$= \; -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \;+\; \int (n-1)\cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x\, dx \;=$$

$$= \; -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \;+\; \int (n-1)\sin^{n-2} x\, dx \;-\; \int (n-1)\sin^n x\, dx \;=$$

czyli

$$n \int \sin^n x\, dx \;=\; -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \;+\; (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx$$

i ostatecznie

$$\int \sin^n x\, dx \;=\; -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x \;+\; (1 - \frac{1}{n}) \int \sin^{n-2} x\, dx .$$

Przykład.

$$I_n \;=\; \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Zachodzi związek:

$$I_n \;=\; \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \;+\; \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$

2. Całkowanie funkcji wymiernych

a). sprowadzanie do ułamków prostych

$$\frac{w_1(x)}{w_2(x)} \;=\; \frac{w_1(x)}{(x-x_1)^n (x^2+px+q)^m} \;= \qquad (\text{st.}(w_1) < \text{st.}(w_2) \quad \text{i} \quad \Delta < 0)$$

$$= \; \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{B_m x + C_m}{(x^2+px+q)^m} .$$

b). obliczanie całek

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx \;=\; \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{dla} \quad n = 1\,, \\ \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C & \text{dla} \quad n > 1\,. \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}dx \;=\; \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx \;+\; \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

to się daje scałkować:

$$x^2+px+q \;=\; \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} \;=\; -\frac{\Delta}{4}\left\{\left[\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\right]^2 + 1\right\}$$

zamiana:

$$\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}} \;=\; t \qquad \Longrightarrow \qquad dx \;=\; \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}dt$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \;=\; \int \frac{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}dt}{\left(\frac{-\Delta}{4}\right)^k (t^2+1)^k} \;=\; \left(\frac{-\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

Przykład.

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+5)}\,dx$$

3 Zadania

1. Policzyć całki

$$\int \frac{x^5-4x^3+x^2-2x+1}{x^2}\,dx \qquad \int x^3e^x\,dx \qquad \int x\sin x\,dx \qquad \int x\ln|x|\,dx$$

2. Wyznaczyć wzór rekurencyjny dla $\int \cos^n x\,dx\,.$

3. Rozłożyć na ułamki proste funkcje:

$$\frac{7x^2+1}{(x+3)(x^2-1)} \qquad \frac{5x^2-11x}{(x^2+2)(x-1)^2}$$

4. Policzyć całkę

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx$$

5. Policzyć całkę

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$$

* * *