Wykład 13: Funkcje rzeczywiste c.d: pochodna funkcji

1 Z materiałów Jarosława Wróblewskiego (dla chętnych)

1. ***PRAWDA CZY FAŁSZ?***

- Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.
- Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.
- Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

2. ***Niepotrzebne skreślić.*** W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

Twierdzenie Niech A i B będą niepustymi zbiorami ograniczonymi.

Niech $C = \{a - b : a \in A \wedge b \in B\}$. Wtedy $\inf C = \boxed{\inf A - \sup B}\boxed{\sup B - \inf A}$.

Dowód: Niech $d = \inf A$ i $g = \sup B$.

Wtedy z warunku $d = \inf A$ wynika, że

(1) $\boxed{\forall_{a\in A}}\boxed{\exists_{a\in A}}\ \boxed{a \le d}\boxed{a \ge d}$

oraz

(2) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0}}\boxed{\exists_{\varepsilon>0}}\ \boxed{\forall_{a\in A}}\boxed{\exists_{a\in A}}\ \boxed{a < d + \varepsilon}\boxed{a > d - \varepsilon}$.

Podobnie z warunku $g = \sup B$ wynika

(3) $\boxed{\forall_{b\in B}}\boxed{\exists_{b\in B}}\ \boxed{b \le g}\boxed{b \ge g}$

oraz

(4) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0}}\boxed{\exists_{\varepsilon>0}}\ \boxed{\forall_{b\in B}}\boxed{\exists_{b\in B}}\ \boxed{b < g + \varepsilon}\boxed{b > g - \varepsilon}$.

Chcemy wykazać, że $\inf C = e$, gdzie $e = \boxed{d - g}\boxed{g - d}$, czyli, że

(5) $\boxed{\forall_{c\in C}}\boxed{\exists_{c\in C}}\ \boxed{c \le e}\boxed{c \ge e}$

oraz

(6) $\boxed{\forall_{\varepsilon>0}}\boxed{\exists_{\varepsilon>0}}\ \boxed{\forall_{c\in C}}\boxed{\exists_{c\in C}}\ \boxed{c < e + \varepsilon}\boxed{c > e - \varepsilon}$.

W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).

Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).

Dowolna | Istnieje liczba $c \in C$ jest | będąca postaci $c = a - b$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Z nierówności $\boxed{a \le d}\boxed{a \ge d}$ i $\boxed{b \le g}\boxed{b \ge g}$ otrzymujemy $\boxed{a - b \le e}\boxed{a - b \ge e}$, co dowodzi (5).

Załóżmy | Wykażemy teraz prawdziwość warunku (6).

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy

Znajdziemy taką liczbę dodatnią ε, dla której

istnieje $a \in A$ takie, że $\boxed{a > d - \varepsilon}\boxed{a < d + \frac{\varepsilon}{2}}$ oraz $b \in B$ takie, że $\boxed{b < g + \varepsilon}\boxed{b > g - \frac{\varepsilon}{2}}$. Zatem liczba $c = a - b$ spełnia nierówność $\boxed{c < e + \varepsilon}\boxed{c > e - \varepsilon}$, co kończy dowód warunku (6). □

3. Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

- Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.
- Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.
- Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Postaraj się zrozumieć sens poniższych warunków (niektóre nie mają zbyt głębokiego sensu), gdzie f jest funkcją, a ε , x , y i z przebiegają liczby rzeczywiste, na tyle, aby stwierdzić, czy funkcje dane wzorami x^2, $\sin x$, $x+7$, x^4+16, 2^x je spełniają.

(a) $\exists\limits_{x} f(x) > x$ **(b)** $\forall\limits_{x}\exists\limits_{y}\forall\limits_{z} f(x)+f(y)=z$ **(c)** $\forall\limits_{x}\forall\limits_{z}\exists\limits_{y} f(x)+f(y)=z$ **(d)** $\forall\limits_{x}\exists\limits_{\varepsilon>0} f(x) > \varepsilon$
(e) $\exists\limits_{\varepsilon>0}\forall\limits_{x} f(x) > \varepsilon$ **(f)** $\exists\limits_{x}\forall\limits_{\varepsilon>0} f(x) > \varepsilon$ **(g)** $\forall\limits_{\varepsilon>0}\exists\limits_{x} f(x) > \varepsilon$ **(h)** $\forall\limits_{\varepsilon>0}\exists\limits_{x} |f(x)| < \varepsilon$
(i) $\exists\limits_{\varepsilon>0}\exists\limits_{x} f(x) = \varepsilon$ **(j)** $\forall\limits_{\varepsilon>0}\exists\limits_{x}\forall\limits_{y} f(x)+f(y) \neq \varepsilon$ **(k)** $\forall\limits_{\varepsilon>0}\exists\limits_{\delta>0}\forall\limits_{x>\delta} f(x) = \delta+\varepsilon$

5. Znaleźć dziedzinę oraz punkty ciągłości i nieciągłości funkcji f, jeśli $f(x)$ dane jest wzorem:

(a) $\operatorname{sgn}(\sin x)$ **(b)** $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ **(c)** $\operatorname{sgn}(x^3-x)$ **(d)** $[x] - [\sqrt[3]{x}]$ **(e)** $\left|\left[x+\frac{1}{2}\right] - x\right|$

6. ***Oszustwo*** (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x) = x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon = 1$. Wtedy istnieje takie $\delta > 0$, że dla y spełniających nierówność $|y-x| < \delta$ zachodzi $|x^2-y^2| < 1$. Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x > \frac{1}{\delta}$ i $y = x + \frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2-y^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1$. □

7. ***Oszustwo*** Niech $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0) = 5$, $f(1) = 7$, $g(0) = 8$, $g(1) = 4$. Wtedy istnieje takie $c \in (0,1)$, że $f(c) = g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c \in (0,1)$ mamy $f(c) = 6$. Podobnie stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c) = 6$. A zatem $f(c) = g(c)$, co należało dowieść. □

2 Jednostajna ciągłość funkcji

1. Def. Funkcję $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ nazywamy ***jednostajnie ciągłą*** jeśli

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in D} \qquad |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(y)| < \epsilon\,,$$

lub

$$\forall_{\{x_n\},\{y_n\}\subseteq D} \qquad (x_n - y_n) \ \to\ x_0 \quad \Longrightarrow \quad (f(x_n) - f(y_n)) \ \to\ 0\,,$$

wygodna jest interpretacja intuicyjna z *tulejką* (na wykładzie...) □

2. Tw. Cantora. Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest jednostajnie ciągła. □

3. Wnioski.

- Jeśli funkcja jest ciągła na odcinku otwartym (a, b) i posiada jednostronne granice właściwe w punktach a, b , to jest funkcją jednostajnie ciągłą. □

- Jeśli funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$ i posiada granice właściwe w $-\infty$, $+\infty$, to jest funkcją jednostajnie ciągłą. $\square$

4. Def. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ***spełnia warunek Lipschitza ze stałą*** $L > 0$, jeśli

$$\forall_{x,y \in D} \qquad |f(x) - f(y)| < L\,|x - y|. \qquad \square$$

3 Różniczkowanie funkcji

1. Def. Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f ***jest różniczkowalna w*** x_0 jeśli istnieje i jest skończona granica ***ilorazu różnicowego***: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Granicę tę oznaczamy

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

i nazywamy ***pochodną funkcji*** f ***w punkcie*** x_0. $\square$

Wygodnie jest stosować równoważną formułę

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

2. Interpretacja geometryczna, przykłady

3. Tw. Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

(a) $(\alpha f \pm \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) \pm \beta g'(x_0)$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, założenie: $g(x_0) \neq 0$,

(d) $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ przy założeniu, że $f'(x_0) \neq 0$. $\square$

4. Tw. Jeśli funkcja g jest różniczkowalna w x_0, a f jest różniczkowalna w $y_0 = g(x_0)$, to

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \qquad \square$$

5. Przykłady

6. Tw. Jeśli f jest różniczkowalna w x_0, to jest ciągła w x_0. $\square$

7. Tw. Jeśli f jest różniczkowalna w x_0 oraz posiada lokalne ekstremum w tym punkcie, to $f'(x_0) = 0$. $\square$

8. Def. Jeśli funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie (a,b), to mówimy, że funkcja f ***jest różniczkowalna w przedziale*** (a,b). Oznacza to, że istnieje nowa funkcja: ***pochodna funkcji*** f

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}. \qquad \square$$

9. Wniosek. Analogicznie możemy wprowadzić pochodne wyższych rzędów:

$$(f')' =: f'', \qquad (f'')' =: f''', \quad \ldots \quad \left(f^{(n-1)}\right)' =: f^{(n)}, \quad \ldots$$

10. Tw. Rolla (o wartości średniej) Jeśli f jest ciągła w $[a,b]$, różniczkowalna w (a,b) i $f(a) = f(b) = 0$, to

$$\exists_{c \in (a,b)} : f'(c) = 0. \qquad \square$$

11. **Tw. Cauchy'ego (o wartości średniej)** Jeśli f jest ciągła w $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b), to

$$\exists_{c\,\in\,(a,b)} \;:\; [f(b)-f(a)]\,g'(c) \;=\; [g(b)-g(a)]\,f'(c)\,. \qquad \square$$

12. **Tw. Lagrange'a (o wartości średniej)** Jeśli f jest ciągła w $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b), to

$$\exists_{c\,\in\,(a,b)} \;:\; f'(c) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,. \qquad \square$$

Często korzystamy z następującej postaci tego wzoru:

$$\exists_{\theta\,\in\,(0,1)} \;:\; f(x_0+h) \;=\; f(x_0) \;+\; f'(x_0+\theta\,h)h\,.$$

13. **Wniosek.** Funkcja f różniczkowalna na (a,b) jest **stała** (**rosnąca**, **malejąca**, **nierosnąca**, **niemalejąca**) ***wt.i.t.wt.*** gdy

$$\forall_{x\,\in\,(a,b)} \;:\; f'(x)=0 \quad (\,f'(x)>0\,,\quad f'(x)<0\,,\quad f'(x)\le 0\,,\quad f'(x)\ge 0\,)\,. \qquad \square$$

14. **Tw. (wzór Taylora)** Niech funkcja f posiada ciągłe pochodne do rzędu $n-1$ w przedziale $[x_0,\, x_0+h]$ $(h>0)$ oraz posiada n-tą pochodną w $(x_0,\, x_0+h)$. Wtedy

$$\exists_{\theta\,\in\,(0,1)} \;:\; f(x_0{+}h) \;=\; f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{(n-1)}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta\,h)}{n!}h^n\,. \;\square$$

4 Zadania

1. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji

(a) $\sin x$ na $\mathbb{R}$ **(b)** $\arctan x$ na $\mathbb{R}$ **(c)** $\sin\frac{1}{x}$ na $(0,1)$ **(d)** $\ln x$ na $(0.5, 2)$ **(e)** $x\sin x$ na $\mathbb{R}$

2.

* * *