Wykład 12: Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej

1. **Przypomnienie** Relacja, funkcja, dziedzina, przeviwdziedzina, injekcja, surjekcja, bijekcja, f. monotoniczna, f. odwrotna, obraz zbioru, przeciwobraz zbioru, suma, iloczyn, złożenie funkcji...

2. **Def.** Funkcję $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ nazywamy ***funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej***. □

3. **Przykład** Ciąg o wyrazach rzeczywistych jest funkcją $f : \mathbb{R} \supset \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$. □

1 Granica funkcji w punkcie

1. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ granicę właściwą równą g jeśli:

1.a Def. *ciągowa* (Heinego)

$$\forall_{\{x_n\} \subseteq D \setminus \{x_0\}} \qquad x_n \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to g\,.$$

1.b Def. *otoczeniowa* (Cauchy'ego)

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x \in D} \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_n) - g| < \epsilon\,.$$

Piszemy wówczas: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$. □

2. **Tw.** (*równoważność def. Heinego i Cauchy'ego*)
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ granicę równą g w sensie Heinego **wt.i.t.wt.** gdy ma tę granicę w sensie Cauchy'ego. □

3. **Granica jednostronna** Niech $D \supseteq (a, b) \subset \mathbb{R}$.
Def. Mówimy, że funkcja f ma ***granicę prawostronną*** w punkcie a jeśli

(Heine)

$$\forall_{\{x_n\} \subseteq (a,b)} \qquad x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to g\,,$$

(Cauchy)

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{0<\delta<(b-a)}\ \forall_{x} \qquad a < x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - g| < \epsilon\,.$$

Piszemy: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = g$. □

Analogicznie definiujemy ***granicę lewostronną*** w p. b i piszemy: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = g$. □

4. **Wn.** (d-d: zadanie) Posiadanie przez funkcję f granicy w punkcie x_0 jest równoważne posiadaniu w tym punkcie takich samych obu granic jednostronnych. □

5. **Tw.** Niech $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g_0$. Wówczas:

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$,

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot f_0$ (dla $c \in \mathbb{R}$),

(c) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f_0 \cdot g_0$,

(d) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_0}{g_0}$ (o ile $g_0 \neq 0$).

D-d – analogiczny jak dla granic ciągów – zadanie. □

6. **Granice niewłaściwe.** Pojęcie granicy (granicy jednostronnej) funkcji można rozszerzyć na przypadek granicy niewłaściwej $+\infty$ $(-\infty)$:
Def. funkcja f ma w punkcie x_0 ***granicę niewłaściwą*** $+\infty$ jeśli

$$\forall_{M>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D} \qquad |x-x_0|<\delta \quad \Longrightarrow \quad f(x)>M\,. \qquad \square$$

7. **Granice w nieskończonościach** $(-\infty, +\infty)$

Przykład. granica ciągu: $a_n \to g \quad \Longrightarrow \quad (g=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) \quad$ dla $\quad f:\mathbb{N}_1\to\mathbb{R}\,,\ \ f(n)=a_n\,.$

2 Ciągłość funkcji

1. **Def.** Funkcja $f:\mathbb{R}\supseteq D\to\mathbb{R}$ ***jest ciągła w punkcie*** $x_0\in D$ jeśli (np. Heine)

$$\forall_{\{x_n\}\subset D} \qquad x_n\to x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_n)\to f(x_0)\,. \qquad \square$$

2. **Wniosek.** Tw. 1.5 można zapisać dla funkcji ciągłych w p. x_0. $\square$

3. **Tw.** Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. $\square$

4. **Tw.** Niech $f, g:\mathbb{R}\supset[a,b]\to\mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Wówczas:

$$\left[\ \forall_{x\in Q\cap[a,b]}\ f(x)=g(x)\ \right] \qquad \Longrightarrow \qquad \forall_{x\in[a,b]}\ f(x)=g(x)\,. \qquad \square$$

5. **Przykłady.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

nieciągła w zerze:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0\,,\\ \alpha\in\mathbb{R} & \text{dla} \quad x=0\,. \end{cases}$$

(f. Dirichleta) – nie jest ciągła w żadnym punkcie:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Q}\,,\\ 1 & \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

(f. Riemanna) – jest ciągła tylko w zerze i w punktach niewymiernych:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\{0\}\,,\\ \frac{1}{q} & \text{dla} \quad x=\frac{p}{q}\ :\ NWD(p,q)=1\,. \end{cases}$$

6. **Def.** Funkcja $f:\mathbb{R}\supseteq D\to\mathbb{R}$ nazywa się ***ograniczoną z góry*** (z dołu) jeśli jej zbiór wartości jest zbiorem ograniczonym z góry (z dołu). Oznaczamy:

$$\sup f(D) = \sup_{x\in D} f(x) < \infty\,. \qquad \square$$

7. **Tw.** Funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest ograniczona i osiąga swoje kresy. $\square$

8. **Tw. Darboux.** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

$$f(a)<y<f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists_{c\in[a,b]}\ :\ f(c)=y\,. \qquad \square$$

Zastosowanie: *metoda połowienia* wykorzystywana do rozwiązywania numerycznego równania $f(x)=0$.

9. **Tw.** (o punkcie stałym) Niech f będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$f:[a,b]\to[a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \exists_{c\in[a,b]}\ :\ f(c)=c\,. \qquad \square$$

10. Tw. Niech $f : [a,b] \to [a,b]$ będzie funkcją ciągłą i różnowartościową. Wówczas

f jest funkcją monotoniczną (por. def. z Wykł.9). $\square$

11. Tw. Jeśli ciągła funkcja $f : [a,b] \to [c,d]$ jest bijekcją, to f^{-1} jest również ciągła. $\square$

12. Przykłady funkcji ciągłych w zerze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0\,. \end{cases} \qquad \left(\lim_{x \to 0} f(x) = 0\,, \right)$$

- $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x & \text{dla} \quad x \neq 0\,, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0\,. \end{cases} \qquad \left(\lim_{x \to 0} f(x) = 1\,. \right)$$

3 Zadania

1. Udowodnić Wn. 1.4 .

2*. Udowodnić Tw. 1.5 .

3. Napisać definicje "granicy w $+\infty$", "granicy w $-\infty$", "granicy niewłaściwej w $-\infty$, w punkcie x_0".

4*. Jak można sformułować tezy Tw.1.5 dla przypadków granic niewłaściwych, granic w nieskończonościach, granic kiedy jedna z funkcji dąży do zera ?

5. Czy kwadrat funkcji nieciągłej może być funkcją ciągłą? (Jeśli tak – podać przykład.)

6. Czy złożenie dwóch funkcji nieciągłych może być funkcją ciągłą? (Jeśli tak – podać przykład.)

7. Niech $f(x) = x^2$. Dobrać $\delta > 0$ dla zadanego $\epsilon > 0$ w definicji Cauchy'ego sprawdzając ciągłość funkcji w punktach: $x = 1$ $x = 1000$.

8. Korzystając z definicji Heinego i z definicji Cauchy'ego udowodnić, że

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Udowodnić ciągłość funkcji w punktach: $x = 0.1$ $x = 1000$ dobierając odpowiednie $\delta > 0$ dla zadanego $\epsilon > 0$.

9*. Zbadać ciągłość funkcji

$$\frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}\,.$$

10. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem:

$$f(x) = (x^2 - 16) \sin \frac{\pi}{x+4}\,.$$

Czy można tak określić $f(-4)$, aby funkcja była ciągła? Jak funkcja zachowuje się w nieskończonościach?

11. Czy istnieją takie stałe a, b aby funkcje poniższe były funkcjami ciągłymi?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : \ x < 1\,, \\ ax + b & : \ 1 \le x \le 2\,, \\ (x-3)^2 & : \ 2 < x\,. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + b & : \ x < 1\,, \\ ax + 1 & : \ 1 \le x \le 2\,, \\ (x-3)^2 & : \ 2 < x\,. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+5} & : \ x < 1\,, \\ ax + b & : \ 1 \le x \le 2\,, \\ \frac{1}{x^2+1} & : \ 2 < x\,. \end{cases}$$

12*. Policzyć granice funkcji:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{2 - \sqrt{x+5}}\,, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}\,, \qquad \lim_{x \to 3} \frac{x - \sqrt{x+6}}{x-3}\,.$$

* * *