Wykład 11: Szeregi

Literatura:

1. M. Grabowski, *Analiza matematyczna* powtórzenie, ćwiczenia i zbiór zadań, WNT, Warszawa 1997,
2. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2001.

1 Szeregi liczbowe

1. Paradoks Achillesa: Achilles nie dogoni żółwia?

2. Def. ***Szeregiem*** $\sum a_n$ nazywamy ciąg sum częściowych $\left\{ S_n \ : \ S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \right\}$.

Jeżeli istnieje i jest skończona ***granica sum częściowych*** $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, to nazywamy ją ***sumą szeregu*** $\sum a_n$.
Mówimy, że ***szereg*** $\sum a_n$ ***jest zbieżny***. W przeciwnym razie mówimy, że ***szereg jest rozbieżny***. □

3. Uwaga. Zmiana skończonej liczby początkowych wyrazów szeregu nie ma wpływu na jego zbieżność. □

4. Przykłady

(a) $x = \sum c_n \left(\frac{1}{10}\right)^n \quad (c_n \in \{0, 1, ..., 9\})$ **(b)** $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ **(c)** $\sum \frac{1}{n}$

5. Tw. ***(war. konieczny zbieżności szeregu)***
$\sum a_n$ jest zbieżny $\Longrightarrow \lim a_n = 0$ □

6. Tw. ***(war. Cauchy'ego)***
$\sum a_n$ jest zbieżny $\iff \forall_{\epsilon>0} \ \exists_N \ \forall_{N<n<m} \ |a_n + ... + a_m| < \epsilon$ □

7. Def. ***Szereg geometryczny***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^n \qquad (a \neq 0)$$ □

8. Tw. $\sum a_n, \ \sum b_n$ są zbieżne $\Longrightarrow \sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ jest zbieżny dla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ □

9. Tw. ***(kryterium porównawcze zbieżności szeregów)***
Jeśli $|z_n| < a_n$ dla prawie wszystkich n i $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\sum z_n$ jest zbieżny.
Jeśli $0 < a_n < b_n$ dla prawie wszystkich n i $\sum a_n$ jest rozbieżny, to $\sum b_n$ jest również rozbieżny. □

10. Przykład. $(\alpha \in \mathbb{R})$ ***(szereg Dirichleta)***

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{jest} \quad \begin{cases} \text{zbieżny} & \text{dla} \quad \alpha > 1\,, \\ \text{rozbieżny} & \text{dla} \quad \alpha \le 1\,. \end{cases}$$

11. Def. Szereg $\sum a_n$ nazywamy ***bezwzględnie zbieżnym*** jeśli $\sum |a_n|$ jest zbieżny. □

12. Wniosek. Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny ***(nie odwrotnie)***. □

13. Tw. ***(kryterium d'Alemberta)*** (zał: $z_n \neq 0$)

$$\text{istn.} \ \lim \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sum z_n & \text{jest zbieżny} \quad \text{dla} \quad \lambda < 1\,, \\ \sum z_n & \text{jest rozbieżny} \quad \text{dla} \quad \lambda > 1\,. \end{cases}$$ □

14. Przykłady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

15. Tw. ***(kryterium Cauchy'ego)***

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n>k} \sqrt[n]{|z_n|} = \lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \sum z_n & \text{jest zbieżny} \quad \text{dla} \quad \lambda < 1\,, \\ \sum z_n & \text{jest rozbieżny} \quad \text{dla} \quad \lambda > 1\,. \end{cases} \qquad \square$$

16. Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

2 Szeregi o wyrazach rzeczywistych

1. Def. ***Szereg naprzemienny***

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \qquad (*) \qquad \square$$

2. Tw. ***Leibnitza:*** Jeśli ciąg a_n jest nierosnący i zbieżny do zera, to szereg $(*)$ jest zbieżny. $\square$

3. Przykłady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \qquad (\text{jakie } \alpha\,?)$$

3 Szeregi potęgowe

1. Def. Niech $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych. ***Szeregiem potęgowym*** nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (**) \qquad \square$$

2. Tw. ***Abela:*** Jeśli dla pewnej liczby α szereg $\sum c_n \alpha^n$ jest zbieżny, to szereg $(**)$ jest zbieżny dla $|z| < |\alpha|$. $\square$

3. ***Promień zbieżności szeregu potęgowego***
Niech A będzie zbiorem liczb zespolonych, dla których szereg $\sum c_n z^n$ jest zbieżny, (np. $0 \in A$).
Def. ***Promieniem zbieżności*** szeregu $(**)$ nazywamy liczbę

$$r = \sup\{\, |z| \;:\; z \in A \,\} \qquad \square$$

4. Tw. Szereg $(**)$ jest bezwzględnie zbieżny dla $|z| < r$, jeest rozbieżny dla $|z| > r$.
(Jeśli $r = +\infty$, to szereg $(**)$ jest zbieżny w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$.) $\square$

5. Przykłady.

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}\,,$$

6. Tw. ***Cauchy'ego-Hadamarda:***

$$\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{dla} \quad \lambda \in (0, \infty)\,, \\ 0 & \text{dla} \quad \lambda = \infty\,, \\ \infty & \text{dla} \quad \lambda = 0\,. \end{cases} \qquad \square$$

4 Zadania

historia (kolokwium na Politechnice)**:**

-1.
$$\frac{(1-\mathbf{i})^{11}}{(\sqrt{3}+\mathbf{i})^6} = ?$$

-2*. Rozwiąż równanie: $z^4 = (1+2\mathbf{i})^8$

-3*. Narysuj zbiór: $\left\{ z \in \mathbb{C} \;:\; |2\mathbf{i}z+4| < 32 \;\wedge\; \operatorname{Arg} z \le \frac{4}{3}\pi \right\}$

aktualne:

1*. Zbadać zbieżność szeregów, i jeśli się uda, to policzyć sumy szeregów zbieżnych:

(a) $\sum \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ **(b)** $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **(c)** $\sum \frac{1}{2n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$

2. Zamienić ułamki okresowe na zwykłe:

(a) 0.2(4) **(b)** 0.32(125)

3*. Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ poniższe szeregi są zbieżne?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(x^2-3x+1)^n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\sin(-x)}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left((2\cos x)^n + \frac{1}{(1+\sin^2 x)^n}\right)$

4. Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ poniższe szeregi są zbieżne?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2x)^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

5. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{z}{n}\right)^n$

6*. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych i policzyć ich sumy:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{3^{n+1}}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n$

7. Sprawdzić, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+(nx)^2)}$$
jest zbieżny dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$.

$+\infty$**.** ***wesołych świąt...***

* * *