Wykład 10: CIĄGI LICZBOWE C.D.

Adresy materiałów pomocniczych:

1. **Jarosław Wróblewski:** `http://www.math.uni.wroc.pl/~jwr/anal2004/` (*.pdf),
2. **Janusz Wysoczański:** `http://www.math.uni.wroc.pl/~wys/` (*.doc).

1 Definicje

1. ***Kresy zbioru.*** Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry. ***Kresem górnym*** zbioru A nazywamy najmniejsze z jego ograniczeń górnych i oznaczamy $\sup A$.

   Def. Liczba M jest ***kresem górnym*** zbioru $A \iff$ spełnione są warunki:

   (sup1) $\forall_{a \in A} : \quad a \le M$,

   (sup2) $\forall_{\epsilon > 0}\ \exists_{a \in A} : \quad M - \epsilon < a$. □

   Analogicznie definiujemy kres dolny zbioru A ograniczonego z dołu: ***Kresem dolnym*** zbioru A nazywamy największe z jego ograniczeń dolnych i oznaczamy $\inf A$.

   Def. Liczba m jest ***kresem dolnym*** zbioru $A \iff$ spełnione są warunki:

   (inf1) $\forall_{a \in A} : \quad m \le a$,

   (inf2) $\forall_{\epsilon > 0}\ \exists_{a \in A} : \quad a < m + \epsilon$. □

2. ***Warunek Cauchy'ego.*** Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ spełnia ***warunek Cauchy'ego*** jeśli

$$\forall_{\epsilon > 0}\ \exists_{N \in \mathbb{N}_1}\ \forall_{m,\, n \ge N}\ |a_m - a_n| < \epsilon .$$ □

2 Granice ciągów, c.d.

Tw. 8. Działania na granicach. Jeżeli $\lim a_n = p$ i $\lim b_n = q$, to:

1. $\lim (a_n + b_n) = p + q$,
2. $\lim (a_n * b_n) = p * q$,
3. $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \lim (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha p + \beta q$,
4. $q \ne 0 \implies \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q}$,
5. $k \in \mathbb{N}_1 \implies \lim a_n^k = p^k$,
6. $k \in \mathbb{N}_1 \wedge a_n \ge 0 \implies \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{p}$.

Tw. 9. Warunek Cauchy'ego. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ spełnia warunek Cauchy'ego. □

Tw. 10. Kryterium D'Alemberta.

(a) Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1$$

to ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do zera: $a_n \longrightarrow 0$. □

(b) Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1$$

to ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny (a ciąg $|a_n|$ jest rozbieżny do $+\infty$). □

Uwaga. Zbieżność ani granica ciągu nie zależą od pominięcia lub zmiany skończonej liczby jego początkowych wyrazów. □

Tw. 11. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry, to możemy wybrać podciąg $\{a_{n_k}\}$ rozbieżny do $+\infty$. □

Def. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, $(a_n \le M)$, to określmy

$$M_k = \sup_{n>k}\{a_n\} = \sup\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$$ □

Wniosek Ciąg $\{M_k\}$ jest ciągiem nierosnącym, zatem jest ciągiem ograniczonym z dołu, albo nie... □

Def. ***Granicą górną*** ciągu $\{a_n\}$ nazywamy

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n>k}\{a_n\}\,.$$

Granicą dolną ciągu $\{a_n\}$ nazywamy

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n>k}\{a_n\}\,.$$

□

3 Zadania

1. Czy twierdzenie odwrotne do twierdzenia:
Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

jest prawdziwe? Uzasadnić odpowiedź.

2. Zbadać zbieżność ciągu $\sqrt[n]{a^{2n} + a^{6n}}$ dla ustalonego $a \in \mathbb{R}$.

3. Prawda czy fałsz?

(a) jeśli ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ są rozbieżne, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ też jest rozbieżny,
(b) jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, a ciąg $\{b_n\}$ jest rozbieżny, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ jest rozbieżny,
(c) jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, a ciąg $\{b_n\}$ jest rozbieżny, to ciąg $\{a_n b_n\}$ jest rozbieżny,
(d) jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, a ciąg $\{b_n\}$ jest rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi maja tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $\{a_n b_n\}$ jest rozbieżny,
(e) jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

4. Udowodnić, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad c > 0\,, \\ 0 & \text{dla} \quad c = 0\,, \\ -\infty & \text{dla} \quad c < 0\,. \end{cases}$$

5. Znaleźć kresy (górne i dolne) nastepujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ **(b)** $\{x \in \mathbb{R} : x^4 \ge 5\}$ **(c)** $\{\frac{10^n}{n!} : n \in \mathbb{N}_1\}$

6. Niech A i B będą niepustymi, ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych.
Niech: $a_1 = \inf A$, $a_2 = \sup A$, $b_1 = \inf B$, $b_2 = \sup B$. Co można powiedzieć o nastepujących kresach?

(a) $\sup(A \cup B)$ **(b)** $\inf(A \cup B)$ **(c)** $\sup(A \cap B)$ **(d)** $\sup\{a + b : a \in A, b \in B\}$

* * *