Matematyka dyskretna – zadania na ćwiczenia 1

Licencjat dzienny, Prowadzący: Maciej M. Sysło

0. Ile porównań wykonuje najlepszy znany Ci algorytm porządkowania 3, 4, 5 liczb.

1. Znasz już zapewne kilka algorytmów porządkowania n liczb. Dla znanych Ci metod podaj, ile jest wykonywanych w nich porównań i zamian, ile wykonują działań, jeśli ciąg jest już uporządkowany lub dany jest w odwrotnej kolejności. Czy któryś algorytm nic nie robi, jeśli ciąg jest już uporządkowany?

2. Podaj metodę postępowania, prowadzącą do postawienia na podium trzech **najlepszych** zawodników turnieju.

Podpowiedź. Posłuż się metodą porządkowania na drzewie.

3. Opisz, w jaki sposób rozszerzyć algorytm z zad. 2 na metodę porządkowania całego ciągu.

4. Jak podaje D.E. Knuth, chociaż opis poszukiwania w ciągu uporządkowanym przez połowienie był już znany w latach czterdziestych, dopiero w latach sześćdziesiątych pojawiła się pierwsza, bezbłędna realizacja tej metody. **Podaj opis** algorytmu poszukiwania przez połowienie w wybranym przez siebie języku. Może to być język programowania. **Przetestuj na przykładach**, czy Twoja realizacja tej metody działa poprawnie. Użyj komputera, jeśli opis jest w języku programowania. **Postaraj się wykazać**, że jest to poprawna realizacja.

5. Zapoznaj się (jeśli nie znasz) z metodą kubełkowego (lub koszykowego) porządkowania słów (jednakowej i różnej długości). Określ jej złożoność. Zgromadź argumenty „za" i „przeciw" użyciu tej metody do komputerowego porządkowania liczb – uwzględnij komputerową reprezentację liczb, różne systemy pozycyjne, złożoność obliczeniową metody.

6. Podaj w terminach funkcji podłoga i powała oraz udowodnij, ile liczb całkowitych znajduje się w przedziałach $[a, b)$ oraz $(a, b]$, gdzie a i b są dwoma dowolnymi liczbami.

7. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Podpowiedź. Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkowa $\{x\}$.

8. Uporządkuj (dowodząc każdą z relacji) następujące funkcje tak, aby każda poprzednia funkcja była „*o* małe" od następnej (wszystkie logarytmy są przy takiej samej podstawie, np. 2):

$$\log n,\ (1 - 1/n)^n,\ (\log n)^n,\ n^{\log n},\ \log(n^n),\ 2^{\log n},\ n,\ n^3,\ 3^{n/3},\ 1.001^n,\ 0.88^n,\ n(1+1/n)^n$$

9. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

$n^2 \in O(n^3)$; $\quad n^3 \in O(n^{2.99})$; $\quad 2^{n+1} \in O(2^n)$; $\quad (n+1)! \in O(n!)$; $\quad \log n \in O(\sqrt{n})$; $\quad \sqrt{n} \in O(\log n)$;

Zalecana literatura do wykładu i ćwiczeń

1. R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

2. K.A. Ross, C.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

3. M.M. Sysło, *Algorytmy*, WSiP, Warszawa 1997 (rozdz. 3-6, 9, 10)

4. M.M. Sysło, *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, WSiP, Warszawa 1998 (rozdz. 10).