Druga lista. Z wartości oczekiwanej. Proszę zajrzeć również do zadań na stronie p. Przemki Kanarek (link na mojej stronie). Niektóre zadania mogą być trudne.

Zadanie 1

Udowodnij, że jeśli X, Y są niezależne, to

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Zadanie 2

Pokaż, że

$$\mathbb{E}[\sum_i a_i X_i] = \sum_i a_i \mathbb{E}[X_i].$$

Zadanie 3

Dane jest p pudełek i k kulek. Niezależnie i jednostajnie wrzucamy kulki do pudełek. Jaka jest oczekiwana liczba pustych pudełek? A niepustych pudełek? Jaka jest oczekiwana liczba kulek będących w pudełku z 1. kulka? Czy gdzieś korzystamy z niezależności?

Zadanie 4

Losujemy niezależnie i jednostajnie n punktów ze zbioru $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, m\}$ (na płaszczyźnie). Mówimy, że punkt (x_1, y_1) dominuje punkt (x_2, y_2), jeśli $x_1 > x_2$ oraz $y_1 > y_2$. Jaka jest oczekiwana ilość punktów zdominowanych (liczonych z krotnościami, tj. jeśli jeden punkt jest dominowany k różnych punktów to liczymy go k-krotnie).

Zadanie 5

Niech X ma tylko wartości naturalne. udowodnij, że

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i>0} \mathbb{P}[X \geqslant i] = \sum_{i \geqslant 0} \mathbb{P}[X > i]$$

Zadanie 6

Rzucamy kostką tak długo, aż uzyskamy wszystkie oczka. jak jest oczekiwana ilość rzutów?

Zadanie 7

W każdej chwili $t = 1, 2, \ldots$ cząstka może z prawdopodobieństwem p zniknąć lub podzielić się na k nowych (identycznych) cząstek. Jaka jest oczekiwana liczba cząstek po w chwili n?

Zadanie 8

Pokaż, że $\mathbb{D}^2[X] = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest stałe.

Zadanie 9

Wyraź wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $aX + b$ (a, b – liczby rzeczywiste) przez odpowiednie funkcje zmiennej X.