

# Kody korekcyjne: Lista 14

23 stycznia 2020

**Zadanie 1.** Pokaż, że dla  $(a_1, a_2)$  wylosowanych jednorodnie z  $\mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0, 0)\}$  oraz ustalonego  $(\sigma, \tau) \in \mathbb{F}_q^2$  dla każdego  $i \in \mathbb{F}_q^*$  zmienna losowa  $(a_1 i + \sigma, a_2 i + \tau)$  jest ma rozkład jednostajny na  $\mathbb{F}_q^2 \setminus \{(\sigma, \tau)\}$ .

Pokaż też, że dla  $(a_1, a_2) \neq (a'_1, a'_2)$  zbiory  $\{(a_1 i + \sigma, a_2 i + \tau) : i \in \mathbb{F}_q\}$  i  $\{(a'_1 i + \sigma, a'_2 i + \tau) : i \in \mathbb{F}_q\}$  mają tylko jeden element wspólny.

**Zadanie 2.** Dla słowa  $w \in \mathbb{F}_q^2$  o odległości od kodu  $\text{RM}(q, 2, r)$  (czyli liczbie błędów)  $\delta q^2$  wylosujemy parę  $(a_1, a_2) \in \mathbb{F}_q^2 \setminus (0, 0)$  oraz ustalmy  $(\tau, \sigma) \in \mathbb{F}_q^2$ . Podaj wartość oczekiwaną liczby błędów na współrzędnych ze zbioru  $\{(a_1 i + \tau, a_2 i + \sigma) : i \in \mathbb{F}_q\}$ ; rozpatrz osobno przypadki, gdy na pozycji  $(\tau, \sigma)$  jest lub nie ma błędu.

**Zadanie 3.** Udowodnij, że dla każdej funkcji  $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$  istnieje funkcja liniowa  $\varphi : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$  spełniająca  $\delta(f, \varphi) \leq \frac{1}{2}$ .

W poniższych zadaniach przez „test” dla funkcji  $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$  rozumiemy: wylosuj  $x, y \in \mathbb{F}_2^n$ , sprawdź czy  $f(x) = f(x + y) + f(y)$  (tj. test się powiódł, jeśli równość jest spełniona).

**Zadanie 4.** Pokaż, że jeśli dla funkcji  $f$  test nie powiedziecie się z prawdopodobieństwem  $\delta_0 < \frac{2}{9}$ , to dla każdego  $x \in \mathbb{F}_2^n$

$$\mathbb{P}_{y, y'}[f(x + y) - f(y) \neq f(x + y') - f(y')] < 2\delta_0$$

**Zadanie 5.** Jeżeli dla każdego  $x$

$$\mathbb{P}_{y, y'}[f(x + y) - f(y) \neq f(x + y') - f(y')] < 4/9$$

to  $\varphi(x)$  zdefiniowane jako najczęstsza wartość

$$\{f(x + y) - f(y) : y \in \mathbb{F}_2^n\}$$

spełnia

$$\mathbb{P}_y[\varphi(x) \neq f(x + y) - f(y)] < 1/3$$

**Zadanie 6.** Pokaż, że dla funkcji  $f$ , której test nie powiedzie się z prawdopodobieństwem  $\delta_0 < 2/9$ , funkcja  $\varphi$  zdefiniowana jako:

$$\varphi(x) = \text{najczęstsza wartość z } \{f(x + y) + f(y) : y \in \mathbb{F}_2^n\}$$

jest funkcją liniową.