Lista 1

1 Ciała, przestrzenie liniowe, liniowa niezależność, eliminacja Gaußa

1.1 Ciała

Zadanie 1. Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ istnieje element odwrotny, tj. dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p$ różnego od 0 istnieje a^{-1} takie że $a \cdot a^{-1} = 1$. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

1.2 Podprzestrzenie liniowe

Zadanie 2. Rozważmy zbiór wszystkich (nieskończonych) ciągów o elementach w $\mathbb{R}$. Definiujemy dodawanie takich ciągów po współrzędnych, tak samo mnożenie przez skalar, tj.:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), \quad \alpha(a_1, a_2, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots) \ .$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdzie $\vec{0}$ to ciąg złożony z samych 0. Dla podanych poniżej podzbiorów tej przestrzeni liniowej określ, które z nich są podprzestrzeniami liniowymi, a które nie. Odpowiedzi *uzasadnij.*

(a) Zbiór ciągów $(a_1, a_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}$. Zauważ, że każdy z tych ciągów jest jednoznacznie określony przez swoje dwa pierwsze elementy a_1 oraz a_2.

(b) Zbiór ciągów $(b_1, b_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 2$ mamy $b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1$. Podobnie jak wyżej, każdy taki ciąg jest określony przez swój pierwszy element b_1.

(c) Zbiór ciągów $(c_1, c_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$. Ponownie, każdy taki ciąg jest określony przez swoje dwa pierwsze elementy.

(d) Zbiór ciągów $(d_1, d_2, \ldots)$ takich, że skończenie wiele liczb spośród $d_1, d_2, \ldots$ jest dodatnia.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{V}$ — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ będą jej podprzestrzeniami.

Pokaż, że $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$ oraz $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ są odpowiednio: największą przestrzenią liniową zawartą w $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}'$ oraz najmniejszą zawierającą $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}$.

Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $\mathbb{V} \times \mathbb{V}'$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

1. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
2. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
6. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 1\}$
7. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 0\}$
8. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 1\}$
9. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
10. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Zadanie 5. Pokaż, że następujące zbiory funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ \text{zbiór } \{r \ : \ f(r) \neq 0\} \text{ jest przeliczalny}\}$$
$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ f \text{ ma skończone wiele wartości}\}$$

są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Zadanie 6. Pokaż wprost z definicji, że: U jest zbiorem liniowo zależnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim wektor $u \in U$, taki że

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{u\}).$$

Pokaż też, że jeśli U nie zawiera wektora zerowego $\vec{0}$, to są przynajmniej dwa takie wektory u.

Zaneguj obustronnie tę równoważność, aby uzyskać charakteryzację zbioru liniowo zależnego.

1.3 Kombinacje liniowe wektorów

Zadanie 7. Niech $\mathbb{V}$, przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, $U = (v_1, v_2 \ldots, v_k)$ będzie układem wektorów z $\mathbb{V}$, zaś $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ciąg skalarów, takich że $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\mathrm{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_2 \ldots, v_k\right\}\right) = \mathrm{LIN}\left(\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}\right).$$

Zadanie 8. Przedstaw wektor w jako kombinację podanych wektorów v_1, v_2, $\ldots$, v_k (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

1. $w = (1, 5)$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 0)$.
2. $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.
3. $w = (5, 10, 11)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (1, 8, 7)$.
4. $w = (4, 17, 18)$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 3, 2)$, $v_3 = (3, 9, 11)$.

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 1))$? A ile do $\mathrm{LIN}((1, 2, 1), (2, 1, 2))$?

Zadanie 10. Pokaż następujące fakty wprost z definicji, tj. rozpisując odpowiednie kombinacje liniowe:

- Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, $U \subseteq \mathbb{V}$ układam wektorów. Wtedy:

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U)) \ .$$

- Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{V}$ wektorami z tego ciała. Jeśli skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ są niezerowe to

$$\mathrm{LIN}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{LIN}(\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_k v_k).$$

- Dla $i \neq j$ oraz skalara $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\mathrm{LIN}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{LIN}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k).$$

Lista 2

Zadanie 1. Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$):

- Zbiór B jest liniowo niezależny.
- Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Pewien wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Każdy wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z B.

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.

Zadanie 2. Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + U' := U \triangle U', \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \triangle U' = (U \setminus U') \cup (U' \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$. Podaj bazę tej przestrzeni (najlepiej: naturalną).

Zadanie 3. Dla zbioru z Zadania 2, niech $U_1, U_2, \dots, U_k \subseteq M$ są takie, że dla każdego i zbiór U_i nie jest podzbiorem sumy pozostałych zbiorów, tj. $U_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} U_j$. Pokaż, że $U_1, U_2, \dots, U_k$ są liniowo niezależne.

2 Baza przestrzeni liniowej, Wymiar

2.1 Eliminacja Gaußa

Zadanie 4. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$)?

1. $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)$
2. $(0, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 1, 1)$
3. $(1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 2, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$
4. $(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)$

Zadanie 5. Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1)$;
- $(2, 3, -4, -1), (1, -2, 1, 3)$;
- $(2, 3, 5, -4, 1), (1, -1, 2, 3, 5)$.

Zadanie 6. Dla poniższych zbiorów wektorów sprawdź, czy są one bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Jeśli nie, to wybierz z nich maksymalny zbiór liniowo niezależny X i podaj dowolny zbiór wektorów Y, taki że $X \cup Y$ jest bazą.

- $\{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 4, 1), (0, 0, 1, 0)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

Zadanie 7. Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \dots, v_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiory wektorów

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo niezależne?

Wskazówka: Można bezpośrednio z definicji, ale szybciej: zauważ, że $v_1, \dots, v_n$ są bazą przestrzeni liniowej (jakiej). Można na nich zastosować eliminację Gaußa.

2.2 Wymiar

Zadanie 8. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$ (będących podprzestrzeniami $\mathbb{V}$) zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

2.3 Wyrażanie w bazie

Zadanie 9. Niech $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych. Pokaż, że $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{V}$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \in \mathbb{V}'$ jest liniowo niezależny/jest liniowo zależny/jest bazą.

2.4 Zastosowanie Eliminacji Gaußa

Zadanie 10. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

- $S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
- $S = \{(2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}$, $T = \{(3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0)\}$.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy.). *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:
Jeśli $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, to zbiór liczący $k + 1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $v_1, \ldots, v_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.

Lista 3

2.5 Warstwy

Zadanie 1. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U = u + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $u \in \mathbb{V}$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset \ .$$

Możesz skorzystać z Zadania 1, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, zaś U i U' warstwami jakichś (niekoniecznie takich samych) podprzestrzeni $\mathbb{V}$.

Pokaż, że przecięcie $U \cap U'$ jest puste lub jest warstwą (jakiejś podprzestrzeni).

3 Przekształcenia liniowe

Zadanie 4. Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- $G(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;

Wskazówka: Możesz skorzystać z faktu: jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\mathrm{LIN}(b_1, \ldots, b_k) = \mathbb{V}$ to $\mathrm{LIN}(F(v_1), \ldots, F(v_k)) = \mathrm{Im}\, F$.

Zadanie 5. Wyznacz bazę jądra dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Wskazówka: Ułóż odpowiedni układ równań.

Zadanie 6. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x, y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$,
- $L'(x, y, z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$,
- $L''(x, y, z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$.

Dla tych z powyższych przekształceń, które są liniowe, znajdź ich rzędy oraz opisz jądra i obrazy.

Zadanie 7. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $F : \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ niezerowym (tj. istnieje $v \in \mathbb{V}$ takie że $F(v) \neq \vec{0}$) przekształceniem liniowym (takie przekształcenia nazywamy *funkcjonałami liniowymi*).

- Jaki jest wymiar jądra $\ker F$?

- Ustalmy dowolny wektor $w \in \mathbb{V} \setminus \ker F$. Pokaż, że $\mathrm{LIN}(\ker F \cup \{w\}) = \mathbb{V}$.
- Niech F, G będą dowolnymi funkcjonałami liniowymi na $\mathbb{V}$ o tym samym jądrze, tj. $\ker F = \ker G$. Korzystając z poprzedniego punktu pokaż, że wtedy istnieje $\beta \in \mathbb{F}$, taka że $F = \beta G$.

Zadanie 8. Niech $F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ będzie funkcjonałem liniowym. Pokaż, że istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takie że

$$F((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad .$$

Wskazówka: Wystarczy zadać F na bazie standardowej.

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} \quad ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\mathrm{Im}\, F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Wskazówka: Możesz skorzystać ze wskazówek do Zadania 4 i Zadania 5.

Zadanie 10. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(\mathbb{V})$.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy, choć nie jest takie trudne)**.** Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora v.

Udowodnij uogólnienie tego faktu:
Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(v) = \vec{0}$ dla dowolnego v, to zachodzi również $L^n(v) = \vec{0}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $v, L(v), L^2(v), \ldots, L^n(v)$. Są one liniowo zależne.

Lista 4

4 Macierze

Zadanie 1. Pokaż, że zbiór macierzy $n \times m$ nad ciałem $\mathbb{F}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$. Jaki jest wymiar tej przestrzeni?

4.1 Macierze: definicje i podstawowe operacje

Zadanie 2. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} &= B \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B &= A \cdot (\alpha B) \\ A[B|C] &= [AB|AC] \\ \left[\frac{B}{C}\right] A &= \left[\frac{BA}{CA}\right] \end{aligned}$$

Zadanie 3. Pokaż, że

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad .$$

Zadanie 4. Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \quad .$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależności:

$$f_{n+k} = f_{k-1} f_n + f_k f_{n+1} = f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n.$$

Zadanie 5. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n \quad .$$

Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp.

Zadanie 6. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

4.2 Macierze jako przekształcenie liniowe

Zadanie 8. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 9. Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Pokaż, że:

- $\ker(L_M) \subseteq \ker(L_{M^2})$, gdzie L_M to przekształcenie $v \mapsto Mv$, analogicznie L_{M^2};
- $\mathrm{rk}([M|M^2]) = \mathrm{rk}(M)$ (dla przypomnienia: $[M|M^2]$ to macierz otrzymana poprzez napisanie obok siebie macierzy M i M^2);

Wskazówka: W drugim punkcie skorzystaj z tego, że $\mathrm{rk}(M) = \dim \mathrm{Im}\, L_M$ albo z poprzedniego punktu.

Zadanie 10. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 11 (***** Nie takie trudne, ale powiedzmy, że nie liczy się do podstawy)**.** Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$ postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$. *Uzasadnij odpowiedź.*

Lista 5

Zadanie 1 (* Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.

Pokaż też, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy przekątniowej.

Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że używając eliminacji Gaussa można sprowadzić macierz odwracalną do macierzy diagonalnej. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje. Dla macierzy nieodwracalnej skorzystaj z faktu używającego jednocześnie eliminacji na kolumnach i wierszach, potem postępuj podobnie.

4.3 Macierze odwracalne

Zadanie 2. Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 3. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 4 (Ślad macierzy). *Śladem* macierzy kwadratowej jest suma elementów na jej przekątnej, tj.

$$\operatorname{tr}\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Pokaż, że:

- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$;
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Zadanie 5. Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnotrójkątną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątna/górnotrójkątna.

Zadanie 6. Niech M będzie odwracalną macierzą symetryczną/diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest symetryczna/diagonalna.

(Macierz M jest symetryczna, jeśli $M^T = M$.)

Zadanie 7. Znajdź wszystkie macierze A wymiaru 2×2 spełniające warunek $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że $\operatorname{rk}(A) = 2$ implikuje $\operatorname{rk}(A^2) = 2$. Potem rozpatrz możliwe $\operatorname{rk}(A)$.

Zadanie 8. *Minor* A to dowolna macierz utworzona z A poprzez usunięcie pewnego zbioru kolumn i pewnego zbioru wierszy.

Pokaż, że dla (niekoniecznie kwadratowej) macierzy A zachodzi:

$$\operatorname{rk}(A) = \max\{\operatorname{rk}(A') \ : \ A' \text{ jest macierzą kwadratową i minorem } A\} .$$

Wskazówka: Może być pomocne, że rząd kolumnowy i wierszowy są sobie równe.

Zadanie 9. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

5 Macierz przekształcenia liniowego w bazie.

Zadanie 10. Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;
- obrót przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara);
- symetrii $\mathbb{R}^2$ względem prostej zadanej równaniem $y = 2x$.

Zadanie 11. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopnia najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów x^0, x^1, x^2, x^3 oraz $x^0, x^0 + x^1, x^0 + x^1 + x^2, x^0 + x^1 + x^2 + x^3$. Udowodnij, że są one bazami. Zapisz macierz przejścia między tymi bazami.

Rozważmy przekształcenie $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w dwóch podanych powyżej bazach.

Lista 6

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Zadanie 2. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 3. Na wykładzie podany był dowód rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny. Uogólnij ten dowód na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaże, że dla dowolnego j zachodzi

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

oraz dla dowolnego i zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}),$$

gdzie $A_{i,j}$ jest minorem powstałym przez wykreślenie z macierzy A jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Wskazówka: Wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.

Zadanie 4. Rozważmy macierze A wymiaru $n \times n$, C wymiaru $m \times m$, B wymiaru $m \times n$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapiszmy ją jako $\mathbf{0}$). Wtedy notacja

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz A wypełnia lewy górny róg, macierz B lewy dolny, macierz C prawy dolny a macierz $\mathbf{0}$ prawy górny). Pokaż, że

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C) \ .$$

Zadanie 5 (Wyznacznik macierzy klatkowej)**.** Dla macierzy kwadratowych $M_1, \dots, M_k$ rozważamy macierz M postaci (*macierz klatkowa*):

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{bmatrix},$$

tzn. przekątna M pokrywa się z przekątnymi macierzy $M_1, \dots, M_k$, a poza tymi macierzami M ma same zera. Pokaż, że

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i) \ .$$

Wskazówka: Pokaż najpierw dla dwóch macierzy.

Zadanie 6. Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} .$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

Wskazówka: $\mathbb{Z}_{17}$ i metoda eliminacji.

Zadanie 7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix} .$$

Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

Zadanie 8. Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix} .$$

Zadanie 9 (* Alternatywny dowód tw. Cauchy'ego; nie liczy się do podstawy). Zadanie to polega na pokazaniu alternatywnego dowodu tw. Cauchy'ego.

Niech A, B, C będą macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie $C = AB$ oraz $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = n$.

Rozważ macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$. Ile wynosi jej wyznacznik?

Pokaż, że przy pomocy operacji kolumnowych (tj. zamiany kolumn i dodawania do kolumny wielokrotności innej kolumny) można macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$ przekształcić do macierzy $\begin{bmatrix} A & C \\ -\mathrm{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a tą do macierzy $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\mathrm{Id} \end{bmatrix}$. Ile wynosi wyznacznik tej macierzy?

Zadanie 10. Pokaż, że układ równań uzyskany przez

- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$

jest równoważny wejściowemu.

Wskazówka: Można na palcach, ale prościej jest zinterpretować to jako wierszowe operacje elementarne, które są odwracalne.

Zadanie 11. Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Lista 7

Zadanie 1. Zbadaj ilość rozwiązań podanych układów równań w zależności od parametru λ, pierwszy układ jest nad $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{cases} \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Zadanie 3. Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru λ):

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\begin{cases} & x_1 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_4 & = & 0 \\ -x_1+ & x_3 & -x_5 & = & 0 \\ -x_2+ & x_4 & -x_6 & = & 0 \\ & -x_3 & +x_5 & = & 0 \\ & -x_4 & +x_6 & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} & x_1 & +x_2 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & +x_{n-1} & +x_n & = & 0 \\ & x_{n-1} & +x_n & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

5.1 Wartości i wektory własne

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy M, to suma (mnogościowa) baz przezstrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_k}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

Wywnioskuj z tego, że $\mathbb{V}_{\lambda_1} \cap \mathrm{LIN}(\bigcup_{i=2}^{k} \mathbb{V}_{\lambda_i}) = \{\vec{0}\}$.

Wskazówka: Najprościej przez indukcję dodając pojedyncze wektory.

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A to λ^k jest wartością własną A^k.

Zadanie 7. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

Wskazówka: $\det(A) = \det(A^T)$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$.

Zadanie 8. Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne.

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.2 Wielomian charakterystyczny

Zadanie 9 (* Nie liczy się do podstawy)**.** Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B, które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie udowodnij (eliminacja Gaußa), że każda macierz M jest iloczynem macierzy elementarnych oraz macierzy ww. postaci.

5.3 Przestrzenie niezmiennicze

Zadanie 10. Niech $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A.

5.4 Macierz Jordana

Zadanie 11 (Klatka Jordana)**.** *Klatka Jordana* wymiaru $n \times n$ to macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że ma ona dokładnie jedną wartość własną λ o krotności algebraicznej n oraz krotności geometrycznej 1.

Lista 8

Zadanie 1. Rozpatrzmy klatkę Jordana J dla $|\lambda| < 1$. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} J^n$ to macierz zerowa. Granicę rozumiemy tutaj punktowo, tj. macierz J^∞ jest tą granicą $\lim_{n\to\infty} J^n$, jeśli dla każdego i, j granica $\lim_{n\to\infty}(J^n)_{i,j}$ istnieje oraz $(J^\infty)_{i,j} = \lim_{n\to\infty}(J^n)_{i,j}$.

Wskazówka: Warto przedstawić macierz J jako $J = \lambda \mathrm{Id} + J'$. Rozwiń $(\lambda \mathrm{Id} + J')^n$ ze wzoru dwumianowego. Jak wyglądają kolejne potęgi J'?

5.5 PageRank

Zadanie 2. Rozważmy gra o wierzchołkach $\{1, 2, 3, 4\}$ i krawędziach skierowanych $1 \to 2$, $1 \to 3$, $1 \to 4$, $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 1$, $4 \to 3$. Jak wygląda znormalizowana macierz sąsiedztwa tego grafu? Oblicz PageRank tego grafu dla $m = 0,15$.

Zadanie 3. Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy kolumnowo stochastycznych (dodatnich) jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Zadanie 4. Niech $M_1, \dots, M_k$ będą macierzami kolumnowo stochastycznymi (dodatnimi) oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są liczbami nieujemnymi, spełniającymi $\sum_i \alpha_i = 1$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą kolumnowo stochastyczną (dodatnią).

Zadanie 5. Niech M będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną. Pokaż, że M nie ma wartości własnej -1.

Wskazówka: Rozpatrz M^2. Jaka jest krotność geometryczna wartości własnej 1?

Zadanie 6. Niech M będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną, potraktujmy ją jako macierz liczb zespolonych.

Pokaż analogicznie do dowodu na wykładzie, że jeśli M ma wartość własną o module 1, to wektor własny tej wartości własnej jest postaci $\alpha\vec{V}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$ oraz $\vec{V} > 0$. Wywnioskuj z tego, że M ma jedynie rzeczywiste wartości własne o module 1.

Zadanie 7. Wywnioskuj z Zadań 1, 5 oraz 6, że dla dodatniej macierzy stochastycznej M oraz dowolnego wektora $\vec{V}$ spełniającego $\sum_i v_i = 1$ granica $\lim_{k\to\infty} M^k\vec{V}$ to wektor własny dla wartości własnej 1. Użyj oryginalnego fragmentu dowodu dotyczącego niezmienniczości $\mathbb{V}_{=0}$.

5.6 Iloczyn skalarny

Zadanie 8. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, tj. dla wektorów $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad .$$

Pokaż, że

$$\Big[\langle u, v \rangle\Big] = u^T v \quad .$$

(Formalnie $\langle u, v \rangle$ jest liczbą, a $u^T v$ macierzą, ale staramy się ignorować takie drobnostki.)

Wywnioskuj z tego, że dla dowolnej macierzy M zachodzi

$$\langle u, Mv \rangle = \left\langle M^T u, v \right\rangle \quad .$$

Zadanie 9. Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$) wymiaru $n \times n$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\langle u, Mv \rangle = \langle Mu, v \rangle$$

(możesz skorzystać z Zadania 8).

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych v oraz v', to $\langle v, v' \rangle = 0$, tj. v i v' są prostopadłe.

Zadanie 10. Rozpatrzmy przestrzeń liniową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia najwyżej 3. Zdefiniujmy iloczyn skalarny jako

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \ \ .$$

Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^i, x^j \rangle$ dla $0 \leq i \leq j \leq 3$.

Lista 9

Zadanie 1 (Macierz Grama). Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{v_1, \ldots, v_k\}$ w przestrzeni $\mathbb{V}$ wymiaru k z iloczynem skalarnym jako

$$G(\{v_1, \ldots, v_k\}) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,k} \ .$$

Niech $B = b_1, \ldots, b_k$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$. Zdefiniujmy macierz $A = [[v_1]_B \,|\, [v_2]_B \,|\, \ldots \,|\, [v_k]_B]$, tj. macierz, której j-ta kolumna to wektor z $\mathbb{R}^n$ będący wyrażeniem v_j w bazie B. Pokaż, że

$$G(\{v_1, \ldots, v_k\}) = A^T A \ .$$

Korzystając z tej reprezentacji udowodnij, że

- $\det(G(\{v_1, \ldots, v_k\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{v_1, \ldots, v_k\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jest liniowo zależny.

Komentarz: Założenie, że wymiar przestrzeni i liczba wektorów w układzie są takie sama nie jest potrzebne, ale ułatwia rachunki.

Zadanie 2. Niech $B = v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{V}$ a $v \in \mathbb{V}$ dowolnym wektorem w $\mathbb{V}$. Pokaż, że jeśli $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ to

$$||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \ .$$

Zadanie 3 (Nierówność Bessela; równość Parsevala). Niech $\{e_1, \ldots, e_k\}$ będą układem ortonormalnym, tj.:

- $\forall i \, \langle e_i, e_i \rangle = 1$;
- $\forall i \neq j \, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą).

Pokaż, że dla dowolnego wektora v:

$$\sum_{i=1}^{k} | \langle e_i, v \rangle |^2 \leq ||v||^2 \ .$$

Co więcej, $\{e_1, \ldots, e_k\}$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego v zachodzi równość.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{R}$, zaś $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{V}$ jej podprzestrzeniami (z tym samym iloczynem skalarnym). Pokaż, że:

- $\mathbb{V}_1 \leq \mathbb{V}_2 \iff \mathbb{V}_1^\perp \geq \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp \cap \mathbb{V}_2^\perp$,
- $(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^\perp = \mathbb{V}_1^\perp + \mathbb{V}_2^\perp$.

Zadanie 5. Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\mathrm{d}x \ .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany x^3 oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

Wskazówka: Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 6. Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Zadanie 7. Dokonaj ortonormalizacji baz:

- $(1,2,2),(1,1,-5),(3,2,8)$;
- $(1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,1)$.

Zadanie 8. Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt α na płaszczyźnie
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną. (Przez „współrzędne” rozumiemy standardowe współrzędne $\mathbb{R}^n$.)
- symetria względem podprzestrzeni
  Przypomnienie: symetria względem $\mathbb{W}$ wyraża się jako $2P_{\mathbb{W}} - \mathrm{Id}$, gdzie $P_{\mathbb{W}}$ to rzut na $\mathbb{W}$.

Zadanie 9. Udowodnij, że złożenie izometrii jest izometrią.

Zadanie 10. Udowodnij, że jeśli M jest macierzą ortogonalną, to $\det(M) \in \{-1,1\}$. Wywnioskuj z tego, że jeśli F jest izometrią, to $\det F \in \{-1,1\}$.

Zadanie 11 (Nierówność Hadamarda, nie liczy się do podstawy)**.** Niech $M = [C_1|C_2|\cdots|C_n]$ będzie macierzą kwadratową a $C_1,\ldots,C_n$ jej kolumnami. Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| \ ,$$

gdzie $\|\cdot\|$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym. Pokaż też, że jeśli M jest ortogonalna, to zachodzi równość.

Wskazówka: Potraktuj kolumny M jako wektory i przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje ze stronami równości?

Lista 10

Zadanie 1. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 2. Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $B^T B$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} .$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz B możesz wziąć macierz M_{EA}, gdzie E to baza standardowa, zaś A: baza ortonormalna.

Zadanie 3. Pokaż, że:

- suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
- macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.

Zadanie 4. Niech $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą dodatnio określoną. Udowodnij, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} m_{ii} .$$

Wskazówka: Skorzystaj z nierówności Hadamarda.

Zadanie 5 (Nie liczy się do podstawy)**.** Pokaż, że symetryczna macierz $n \times n$ liczb rzeczywistych jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.

Wskazówka: Wiemy, że suma krotności geometrycznych to n. Rozpatrz macierz Gramma dla bazy ortogonalnej.

Zadanie 6. Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	b	a	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	b	a	c

Zadanie 7. Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

Zadanie 8. Rozważamy trzy grupy:

1. grupą symetrii trójkąta równobocznego (trzy obroty i trzy symetrie osiowe),
2. grupą obrotów sześciokąta foremnego,
3. grupą $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem $\bmod 6$).

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?

Zadanie 9. Pokaż, że dla $x_1, \ldots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \ldots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \cdots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \cdots (x_1)^{-z_1} .$$

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie izomorfizmy pomiędzy grupą obrotów kwadratu, a grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Zadanie 11. Pokaż, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.

Lista 11

Zadanie 1. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzyelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?

Zadanie 2. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G.

- Pokaż, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G.
- Pokaż, że jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G, to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$.
- Pokaż, że jeśli G jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1 h_2 \ : \ h_1 \in H_1, \ h_2 \in H_2\}$.
  (Dla przypomnienia: $\langle A \rangle$ to najmniejsza grupa generowana przez A.)
- Jeśli $\{H_i\}_{i \in I}$ jest dowolną kolekcją podgrup G, to również $\bigcap_{i \in I} H_i$ jest podgrupą G.

Zadanie 3 (Nie liczy się do podstawy)**.** Pokaż, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Wskazówka: Rozważ najmniejszą potęgę generatora, która należy do podgrupy. Pokaż, że jest to generator.

Zadanie 4. Centralizatorem elementu a w grupie G nazywamy zbiór elementów przemiennych z a, czyli

$$G(a) = \{b \in G \ : \ ab = ba\} \ .$$

Centrum grupy G nazywamy zbiór

$$Z(G) = \{a \ : \ \forall b \in G : \ ab = ba\}$$

(czyli: przemiennych ze wszystkimi elementami w G). Udowodnij, że dla dowolnej grupy G i elementu a centralizator $G(a)$ oraz centrum $Z(G)$ są podgrupami G. Pokaż też, że

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} G(g) \ .$$

6 Grupy permutacji

Zadanie 5. Czy zbiór $\{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ z działaniem składania permutacji jest podgrupą grupy S_4? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzyelementowe to czy otrzymamy podgrupą S_4?

Zadanie 6. Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1); (1, 2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n-1$;
- $\langle (1,2); (2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$.

Zadanie 7 (Grupa alternująca)**.** Udowodnij, że jeśli G jest podgrupą grupy permutacji S_n to

- zbiór G_p permutacji parzystych z G jest podgrupą G;
- $|G_p| = |G|$ lub $|G_p| = \frac{|G|}{2}$.

W przypadku, gdy $G = S_n$ to ta podgrupa G_p to grupa alternująca A_n.

Zadanie 8. Dla macierzy $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ rozpatrzmy funkcje:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \ ,$$

$$f'((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \ .$$

Pokaż, że obie definiują wyznacznik.

Wskazówka: Możesz np. sprawdzić, że spełnia aksjomaty wyznacznika. Tylko zamiana kolumn jest nietrywialna: rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

Zadanie 9. Pokaż, że każda permutacja z A_n (czyli permutacja parzysta) jest złożeniem cykli trzy-elementowych.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że iloczyn dwóch transpozycji da się przedstawić jako złożenie najwyżej dwóch takich cykli.

Zadanie 10. Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} .$$

podaj permutację odwrotną σ^{-1}; rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Podaj rząd σ oraz σ^{-1}. Określ ich parzystość.

Zadanie 11.

- Wyznacz permutacje odwrotne do permutacji $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Przedstaw permutację $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ jako złożenie cykli rozłącznych.
- Przedstaw permutacje $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ jako złożenia transpozycji.
- Jakie są rzędy permutacji z powyższych podpunktów?

Lista 12

Zadanie 1. Niech grupa G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ i $c \in \mathcal{C}$. Pokaż, że stabilizator G_c tego elementu jest podgrupą G.

Zadanie 2. Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremnego, sześcianu foremnego, ośmiościanu foremnego, dwunastościanu foremnego, dwudziestościanu foremnego.

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 3 (Grupa dihedralna)**.** Rozpatrzmy grupę obrotów i odbić n-kąta foremnego (nazywamy ją *grupą dihedralną* D_n). Ile ma ona elementów? Pokaż, że nie ma innych przekształceń zachowujących ten wielokąt (tj. przekształceń z wierzchołków w wierzchołki, które zachowują sąsiedztwo wierzchołków).

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 4. W grupie S_{10} rozpatrzmy grupy generowane przez

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
3. $(1, 6, 9)(2, 10)(3, 4, 5, 7, 8)$.

Dla każdego elementu ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ wyznacz jego orbitę oraz stabilizator dla naturalnego działania działania tych podgrup na zbiorze $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Zadanie 5. Rozpatrzmy kwadraty, w których malujemy wierzchołki na biało lub czerwono. Dwa kwadraty uznajemy za identyczne, jeśli można je przekształcić na siebie przez obrót. Ile jest rozróżnialnych kwadratów mających

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

wierzchołków białych? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli dopuścimy też symetrie kwadratu?

Zadanie 6. Ile jest nierozróznialnych naszyjników mających 6 równo oddalonych korali tej samej wielkości, przy czym korale mogą być białe, czerwone lub zielone, a naszyjnik można obracać oraz „przełożyć na drugą stronę".

Zadanie 7. W grupie obrotów i symetrii kwadratu opisz warstwy (prawostronne i lewostronne) podgrupy generowanej przez

- obrót o 180^0.
- obrót o 90^0.
- symetrię wzdłuż przekątnej (wybierz dowolną).

Zadanie 8. Rozważmy grupę G i zdefiniujmy w niej *sprzężenie* (względem elementy g) $\varphi_g : G \to G$:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1} \quad .$$

Pokaż, że

- $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$;
- φ_a jest izomorfizmem z G w G;
- jeśli $H \leq G$ to $\varphi_a(H) \leq G$ (podgrupa sprzężona).

Zadanie 9 (Nie liczy się do podstawy). *Typem* permutacji $\sigma \in S_n$ nazywamy ciąg $(n_1, \ldots, n_n)$, gdzie n_i to liczba cykli długości i w rozkładzie σ na cykle rozłączne.

Pokaż, że dla dwóch permutacji σ, τ permutacja $\tau^{-1}\sigma\tau$ ma taki sam typ, jak permutacja σ.

Wywnioskuj z tego, że jeśli dla $H \leq G \leq S_n$ mamy, że dla każdego możliwego rozkładu na cykle H zawiera albo wszystkie, albo żadne elementy danego typu z G, to $H \trianglelefteq G$.

Korzystając z tego faktu pokaż, że podgrupa $\{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \leq S_4$ jest podgrupą normalną (w S_4).

Wskazówka: Jak wygląda rozkład na cykle elementów w grupie sprzężonej?

Zadanie 10. Znajdź wszystkie podgrupy normalne w grupie obrotów i odbić kwadratu. Dla najmniej licznej z nich podaj tabelę działań w grupie ilorazowej (tj. grupie warstw podgrupy normalne).

Wskazówka: Co wiesz o grupach rzędu 4?

Zadanie 11. Załóżmy, że H jest podgrupą G, a N podgrupą normalną G. Pokaż, że wtedy

$$HN = \{hn \,:\, h \in H,\, n \in N\}$$

jest podgrupą G.

Załóżmy, że grupy N_1, N_2 są normalne w G. Pokaż, że N_1N_2 jest podgrupą normalną.

Lista 13

Zadanie 1. Wykonaj poniższe obliczenia modulo 3, 5 oraz 15. Oznaczenie 62^{-1} oznacza element odwrotny do $62 \mod m$ w odpowiednim $\mathbb{Z}_m$.

- $-(125 \cdot 18 + 32 \cdot 49)^{-1} \cdot (75 \cdot 27 - 16 \cdot 7) + (77 \cdot 22^{-1} - 18 \cdot 255)$;
- $15^7 - 343^{12} \cdot 241^4 + 175 \cdot 123 - (176^{-1})^4 \cdot 121^2$.

6.1 Algorytm Euklidesa

Zadanie 2. Rozpatrz działanie algorytmu Euklidesa na dwóch kolejnych liczbach Fibonacciego. Jak wygląda para liczb trzymanych po k-tym kroku? Udowodnij, że dla pary liczb (F_{n+1}, F_{n+2}) algorytm wykonuje przynajmniej n kroków.

Pokaż, że algorytm Euklidesa (w którym zastępujemy a przez $a \bmod b$, a nie a przez $a-b$) wykonuje $\mathcal{O}(\log(a) + \log(b))$ kroków.

Wskazówka: Pokaż, że w jednym kroku któraś z liczb zmniejsza się o połowę.

Zadanie 3. Uogólnij algorytm Euklidesa dla większej liczby liczb $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Pokaż, że $\mathrm{nwd}(m_1, \ldots, m_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i m_i$ dla pewnych liczb całkowitych x_i.

Wskazówka: Rozważ, co zwraca algorytm Euklidesa dla dwóch liczb m_1 oraz $m_2 m_3 \cdots m_k$. Rekurencyjnie postępuj dla $m_2 m_3 \cdots m_k$.

Zadanie 4. Pokaż, że dla liczb całkowitych $a, b > \mathrm{nwd}(a, b)$ są dokładnie dwie pary liczb całkowitych (x, y), takich że:

- $xa + yb = \mathrm{nwd}(a, b)$ oraz
- $|x| < \frac{b}{\mathrm{nwd}(a,b)}$, $|y| < \frac{a}{\mathrm{nwd}(a,b)}$.

Pokaż ponadto, że w jednej z tych par x jest dodatnie, a y niedodatnie, zaś w drugiej odwrotnie.

Wskazówka: Wydziel najpierw przez $\mathrm{nwd}(a, b)$.

Zadanie 5. Oblicz nwd dla następujących par liczb. Przedstaw je jako kombinację liniową (o współczynnikach całkowitych) tych liczb.

$$\{743, 342\}, \{3812, 71\}, \{1234, 321\}.$$

6.2 Funkcja Eulera

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli n, m są względnie pierwsze, to $\varphi(nm) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.

Wskazówka: Możesz z Chińskiego tw. o resztach; da się też „na palcach", ale nie jest to takie łatwe.

Zadanie 7. Ile wynosi $\varphi(p^k)$, gdzie p jest liczbą pierwszą a $k \geq 1$? Używając Zadania 6, określ, ile wynosi $\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})$ dla $p_1, p_2, \ldots, p_k$—różnych liczb pierwszych.

Zadanie 8. Oblicz φ dla następujących liczb: 7, 9, 27, 77, 143, 105. Możesz skorzystać z Zadania 7.

6.3 Chińskie Twierdzenie o resztach

Zadanie 9 (Nie liczy się do podstawy)**.** Przypomnijmy, że Chińskie twierdzenie o resztach mówi, że gdy $m_1, m_2, \ldots, m_k$ są parami względnie pierwsze, to naturalny homomorfizm z $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2 \cdots m_k}$ w $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ jest izomorfizmem.

Pokaż, że obrazem $\mathbb{Z}^*_{m_1 \cdot m_2 \cdots m_k}$ (czyli elementów odwracalnych w $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2 \cdots m_k}$) tego izomorfizmu jest $\mathbb{Z}^*_{m_1} \times \mathbb{Z}^*_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}^*_{m_k}$.

Zadanie 10. Podaj dowolne rozwiązanie w liczbach naturalnych poniższych układów równań.

$$\begin{cases} x \bmod 7 = 2 \\ x \bmod 5 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \bmod 7 = 1 \\ x \bmod 5 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \bmod 9 = 5 \\ x \bmod 11 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \bmod 9 = 8 \\ x \bmod 11 = 3 \end{cases}.$$

Zadanie 11. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 2, 3, 5, 7 daje odpowiednio reszty 1, 2, 4, 6.

Lista 14

Zadanie 1. Wyznacz największy wspólny dzielnik par wielomianów (o ile nie jest napisane inaczej: w $\mathbb{R}[x]$)

- $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ oraz $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$;
- $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 4$ oraz $x^4 + 4$ (w $\mathbb{Z}_5[x]$);
- $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60$ oraz $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$;
- $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$ oraz $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$ (w $\mathbb{Z}_3[x]$).

W którymś z przykładów wyraź nwd jako kombinację podanych wielomianów.

Zadanie 2. Wyznacz $f+g$, $f \cdot g$ dla podanych wielomianów f, g. Podziel też podane pary wielomianów. (O ile nie jest napisane inaczej: w $\mathbb{R}[x]$):

- $f = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 10$, $g = x^2 - 4$;
- $f = x^4 + 4x^3 - x^2 - 15x - 11$, $g = x^2 - 4x + 3$;
- $f = x^4 + 1$, $g = x^2 + 3x + 2$ (w $\mathbb{Z}_5[X]$);
- $f = x^2 + 1$, $g = x + 1$ (w $\mathbb{Z}_2[X]$);
- $f = x^p + 1$, $g = x + 1$ (w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla p—pierwszego).

Wskazówka: Do ostatniego: policz, ile wynosi $(x+1)^p$ w $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 3. Udowodnij uogólnienia twierdzenia z wykładu:

Niech f będzie wielomianem nierozkładalnym a $p_1 p_2 \dots p_\ell$ wielomianami w $\mathbb{F}[x]$ oraz $f^k | p_1 p_2 \dots p_\ell$. Wtedy istnieją liczby $n_1, n_2, \dots, n_\ell$, takie że $\sum_i n_i \geq k$ oraz dla każdego i zachodzi $f^{n_i} | p_i$.

Zadanie 4. Korzystając z tw. Bezout rozłóż poniższe wielomiany z $\mathbb{Z}_2[x]$ na czynniki nierozkładalne

$$x^5 + x^3 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + x^2 + 1, \quad x^5 + x^2 + x, \quad x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 + x^2 + x \ .$$

Potraktuj powyższe wielomiany jako wielomiany z $\mathbb{Z}_3[x]$ i również rozłóż je na czynniki nierozkładalne.

Wskazówka: Być może konieczne też będzie osobne zastanowienie się, które wielomiany drugiego stopnia są nierozkładalne.

Zadanie 5. Wielomian f ma resztę z dzielenia przez $x - c_1$ równą r_1 oraz resztę z dzielenia przez $x - c_2$ równą r_2. Ile wynosi reszta z dzielenia f przez $(x - c_1)(x - c_2)$?

Wystarczy, że zapiszesz zależność na współczynniki tego wielomianu, nie musisz jej rozwiązywać.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. Bezout.

Zadanie 6. Niech f, g, f', g', a będą niezerowymi wielomianami z pierścienia wielomianów $\mathbb{F}[x]$. Załóżmy, że $f = af'$ oraz $g = ag'$.

- Jeśli $h' = \text{nwd}(f', g')$, to ile wynosi $\text{nwd}(f, g)$?
- Jeśli h', r' są ilorazem oraz resztą z dzielenia f' przez g', to ile wynosi iloraz, a ile reszta z dzielenia f przez g?

Zadanie 7. Dane są dwa niezerowe wielomiany $f, g \in \mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$. Załóżmy, że $f = f'f''$ oraz $\text{nwd}(f', g) = 1$. Celem zadania jest pokazania, jak odtworzyć reprezentację $\text{nwd}(f, g)$ jako kombinacji wielomianów f, g z analogicznych reprezentacji dla f'', g oraz f', g.

- Pokaż, że $\text{nwd}(f, g) = \text{nwd}(f'', g)$.
- Niech $\text{nwd}(f'', g) = af'' + bg$ oraz $1 = \text{nwd}(f', g) = cf' + dg$ dla odpowiednich wielomianów $a, b, c, d \in \mathbb{F}[x]$. Wyraź $\text{nwd}(f, g)$ jako kombinację wielomianów f, g; kombinacja ta zapewne będzie używać wielomianów a, b, c, d, f'.

Zadanie 8. Wylicz resztę z dzielenia następujących wielomianów przez $x - c$ dla podanych wartości c (jeśli nie jest powiedziane inaczej: wielomiany są z $\mathbb{R}[x]$).

- $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$, $c \in \{0, 1, 2\}$;

- $2x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $c \in \{1, 2, 3\}$;
- $4x^2 + 3x - 2$, $c \in \{-1, 0, 1\}$;
- $x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Zadanie 9. Podaj wszystkie nierozkładalne wielomiany stopnia 2 oraz 3 w $\mathbb{Z}_2[x]$ oraz wszystkie nierozkładalne wielomiany stopnia 2 nad $\mathbb{Z}_3$.

Zadanie 10 (Nie liczy się do podstawy). Celem tego zadania jest pokazanie, że wielomiany nierozkładalne w $\mathbb{R}[x]$ są stopnia najwyżej 2. Możesz korzystać z (nie tak prostego) twierdzenia, że wielomiany nierozkładalne nad $\mathbb{C}[x]$ są stopnia najwyżej 1. W tym zadaniu utożsamiamy wielomian z jego wartościowaniem a $\overline{x}$ będzie oznaczać sprzężenie (w $\mathbb{C}$) liczby zespolonej x.

Ustalmy wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$.

- Pokaż, że dla liczby zespolonej c zachodzi $f(\overline{c}) = \overline{f(c)}$.
- Wywnioskuj z tego, że jeśli $c \in \mathbb{C}$ jest miejscem zerowym wielomianu f, to jest nim też $\overline{c}$.
- Pokaż, że wielomian $(x - c)(x - \overline{c})$ ma współczynniki rzeczywiste.
- Wywnioskuj z tego, że jeśli f jest nierozkładalny (w $\mathbb{R}[x]$), to jest stopnia najwyżej 2.

Zadanie 11. Pokaż, że dla liczby pierwszej p istnieje wielomian nierozkładalny stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$.

Wskazówka: Zlicz wszystkie wielomiany stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$ oraz wszystkie rozkładalne wielomiany stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$: zauważ, że muszą się one rozkładać na wielomiany stopnia 1.