Algebra 2018/19 — Egzamin II Termin, część 1.

Czas: 165 minut.

Liczba zadań: 6.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane*. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1.

[2 punkty] Podaj definicję sumy (oznaczanej symbolem „+") oraz przecięcia przestrzeni liniowych $\mathbb{V}, \mathbb{W}$.

[2 punkty] Przecięcie oraz suma przestrzeni mogą też być alternatywnie scharakteryzowane jako

„Naj... przestrzeń liniowa, która... $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$."

Podaj te charakteryzacje.

[6 punktów] Dla przestrzeni liniowych $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$, będących podprzestrzeniami wspólnej przestrzeni, udowodnij zawieranie

$$(\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) + (\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) \subseteq \mathbb{U} \cap (\mathbb{V} + \mathbb{W}) \ .$$

Wskaż przykład przestrzeni, dla których zawieranie jest ścisłe. Pokaż, że jeśli $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$, to zachodzi równość.

Zadanie 2.

[2 punkty] Jak definiujemy wyznacznik macierzy?

[2 punkty] Co to jest rozwinięcia Laplace'a. Podaj wersję względem kolumn i wierszy.

[6 punktów] Niech A^* oznacza macierz, którą uzyskujemy z A przez symetrię względem „drugiej" przekątnej, tzn. tej od lewego dolnego rogu do prawego górnego. Wyraź $\det(A^*)$ przez $\det(A)$. Niech A° oznacza macierz A obróconą o $180°$. Wyraź $\det(A^\circ)$ przez $\det(A)$.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A^\circ = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.

[2 punkty] Co to jest jednorodny układ równań? Co umiesz powiedzieć o zbiorze jego rozwiązań?

[2 punkty] Podaj Kryterium (Twierdzenie) Kroneckera-Capelliego. Dla przypomnienia mówi ono o tym, kiedy układ równań $AX = B$ ma rozwiązanie.

[6 punktów] Wyznacz liczbę rozwiązań poniższego układu równań liczb rzeczywistych w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y - az = -1 \\ ax + y + az = 4 \\ 4x + y + 4z = a \end{cases} .$$

Zadanie 4.

[2 punkty] Co to jest przestrzeń niezmiennicza macierzy?

[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o układzie wektorów własnych $v_1, \ldots, v_k$ dla wartości własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, gdzie $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$?

[6 punktów] Udowodnij, że macierz rzeczywista $n \times n$ dla n nieparzystego ma rzeczywistą wartość własną. Dla n parzystego podaj przykład macierzy rzeczywistej, która nie ma rzeczywistych wartości własnych.

Zadanie 5.

[2 punkty] Co to znaczy, że macierz jest dolnotrójkątna? A symetryczna?

[2 punkty] Na jakie operacje zamknięty jest zbiór macierzy dolnotrójkątnych? A macierzy symetrycznych?

[6 punktów] Oblicz macierz odwrotną do poniższej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6.

[2 punkty] Podaj definicję przekształcenia liniowego.

[2 punkty] Co to jest macierz przekształcenia liniowego (w odpowiednich bazach).

[6 punktów] Które z podanych poniżej przekształceń są przekształceniami liniowymi? Każdą odpowiedź negatywną krótko uzasadnij.

(A) A to suma drugiej i trzeciej pochodnej wielomianu, tj. $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $A(f) = f'' + f'''$.
(B) B to iloczyn drugiej i trzeciej pochodnej wielomianu, tj. $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $B(f) = f'' \cdot f'''$.
(C) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $C(x, y, z) = (x + y, y - z, 0)$
(D) $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $D(x, y, z) = (xy, y + 1, -z)$
(E) E przekształca nieskończone ciągi o wyrazach rzeczywistych w nieskończone ciągi o wyrazach rzeczywistych, $E((a_n)_{n=1}^{\infty})$ jako n-ty wyraz ma minimum z $a_1, \ldots, a_n$.
(F) F przekształca nieskończone ciągi liczb rzeczywistych w nieskończone ciągi liczb rzeczywistych, gdzie $F((a_1, a_2, \ldots)) = (0, 1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, \ldots)$.
(G) G przekształca nieskończone ciągi liczb rzeczywistych w nieskończone ciągi liczb rzeczywistych, gdzie $G((a_1, a_2, \ldots)) = (a_2, a_4, a_6, \ldots)$.
(H) $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $D(x, y, z) = (2x, x + y - z, 1)$.

Algebra 2018/19 — Egzamin II Termin, część 2.

Czas: 165 minut.

Liczba zadań: 6.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń. Podzadania za 2 punkty nie wymagają podania dowodu, lecz jedynie sformułowania odpowiednich definicji i twierdzeń.

Zadanie 7.

[2 punkty] Co to jest dopełnienie ortogonalne $U^\perp$ zbioru wektorów U?

[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o dopełnieniu ortogonalnym $U^\perp$, a co o $(U^\perp)^\perp$? Czy umiesz powiedzieć coś więcej, jeśli U jest przestrzenią liniową?

[6 punktów] Podaj bazą dopełnienia ortogonalnego $U^\perp$ poniższego zbioru wektorów U w przestrzeni $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{(2, 0, 2, 0, -1)^T, (5, 0, 2, 1, -4)^T, (-5, 0, 4, 2, 7)^T\} \ .$$

Zadanie 8.

[2 punkty] Co to jest sprzężenie elementu i podgrupy w grupie?

[2 punkty] Dla danej podgrupy $H \leq G$ co umiesz powiedzieć o podgrupach sprzężonych do H? Co umiesz powiedzieć o przypadku, gdy nie ma takich podgrup (tzn. każda jest równa H)?

[6 punktów] Udowodnij, że jeśli $H \leq G$ to warstwy lewostronne aH, bH są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są warstwy prawostronne Ha^{-1}, Hb^{-1}.

Zadanie 9.

[2 punkty] Co to jest kongruencja na pierścieniu?

[2 punkty] Podaj chińskie twierdzenie o resztach.

[6 punktów] Oblicz wartość poniższego wyrażenia arytmetycznego modulo 5, 7 i 35:

$$\left(38^{-35} + 89\right)^{36} \cdot \left((-144)^{-144} \cdot 12^{49} + (-73)^{-78} \cdot (-72)^{-37} + (-15)^{123} + (-21)^{123} + (-280)^{420}\right)^{17} - (-387)^{-103} \ .$$

Zadanie 10.

[2 punkty] Jak zdefiniowane jest dzielenie (z resztą) wielomianów?

[2 punkty] Jakie są własności rozkładu na wielomiany nierozkładalne (w pierścieniu wielomianów o współczynnikach z ciała).

[6 punktów] Dla podanych wielomianów $f, g \in \mathbb{R}[x]$ o współczynnikach rzeczywistych podziel f przez g, oblicz ich największy wspólny dzielnik oraz przedstaw go w postaci $af + bg$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}[x]$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych.

$$f = x^7 + 2x^6 - x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 - x + 6 \ ,$$
$$g = x^6 - x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x + 4 \ .$$

Zadanie 11.

[2 punkty] Jak jest zdefiniowane ciało?

[2 punkty] Ile elementów może mieć ciało skończone? Czy każda taka wartość jest osiągalna?

[6 punktów] Podaj dowolny wielomian nierozkładalny stopnia 5 w $\mathbb{Z}_2[x]$, w szczególności udowodnij, że jest on nierozkładalny.

Zadanie 12.

[2 punkty] Jaką permutację nazywamy cyklem? Co to znaczy, że cykle są rozłączne?

[2 punkty] Jak jest zdefiniowany rozkład na cykle rozłączne permutacji σ i jakie ma własności?

[6 punktów] Niech $\sigma \in S_n$ będzie permutacją. Podaj rozkład na cykle permutacji $\sigma(1, 2, \dots, k)\sigma^{-1}$, gdzie $1 \leq k \leq n$.