Algebra 2018/19 — Egzamin połówkowy

Czas: 165 minut.

Liczba zadań: 6.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1.

[2 punkty] Podaj definicję przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz definicję podprzestrzeni liniowej $\mathbb{W}$.

[2 punkty] Podaj alternatywną charakteryzację podprzestrzeni liniowej (tj. jakie alternatywne warunki charakteryzują podprzestrzeń liniową).

[6 punktów] Dla podanych poniżej zbiorów powiedz, czy są one przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{R}$. Odpowiedź krótko uzasadnij w przypadku odpowiedzi negatywnej.

(1) $\{[v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n \ : \ v_1 = v_2 = \cdots = v_n\}$
(2) $\{[v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n \ : \ |v_1| = |v_2| = \cdots = |v_n|\}$
(3) $\{[v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n \ : \ v_1 \cdot v_2 \cdots v_n = 1\}$
(4) $\{[v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n \ : \ v_1 \cdot v_2 \cdots v_n = 0\}$
(5) $\{[v_1, \ldots, v_{2n+1}]^T \in \mathbb{R}^{2n+1} \ : \ v_1 = v_3 = \ldots = v_{2n+1} = 0\}$
(6) $\{[v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n i v_i = 0\}$
(7) Wielomiany o współczynnikach z $\mathbb{R}$, których pierwsza i druga pochodna są równe.
(8) Wielomiany p o współczynnikach z $\mathbb{R}$, takie że $p(3) - p(4) = 0$.

Zadanie 2.

[2 punkty] Podaj definicję wartości i przestrzeni własnej macierzy.

[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o wektorach własnych macierzy symetrycznej o elementach rzeczywistych?

[6 punktów] Rozważmy macierz M rozmiaru $n \times n$ postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{F}$ a nie wymienione elementy są zerowe (tzn. macierz wygląda analogicznie, jak klatka Jordana). Pokaż, że ma ona co najmniej n różnych podprzestrzeni niezmienniczych.

Wskazówka: Na co przechodzi wektor $\vec{E_i}$?

Zadanie 3.

[2 punkty] Podaj wzory Kramera; dla jakich układów równań mają zastosowanie?

[2 punkty] Jak można opisać zbiór wszystkich rozwiązań równania $M\vec{X} = \vec{B}$ (M jest macierzą rozmiaru $m \times n$)?

[6 punktów] Wyznacz liczbę rozwiązań poniższego układu równań liczb rzeczywistych w zależności od wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & z & = & a \\ -3x & + & y & - & az & = & 3 \\ 7x & - & 5y & + & bz & = & -1 \end{array} \right. .$$

Zadanie 4.
[2 punkty] Podaj definicję jądra $\ker L$ oraz obrazu $\operatorname{Im} L$ przekształcenia liniowego.
[2 punkty] Dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jak umiesz powiązać $\dim(\ker L)$ oraz $\dim(\operatorname{Im} L)$ (ta zależność ma jeszcze jeden składnik: jaki?)
[6 punktów] Dla podanej macierzy M podaj bazy obrazu oraz jądra indukowanego przez nią przekształcenia liniowego.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 11 & -6 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 5.
[2 punkty] Podaj definicję macierzy transponowanej.
[2 punkty] Jak mają się do siebie wyznaczniki macierzy oraz macierzy transponowanej?
[6 punktów] Mówimy, że macierz A jest *antysymetryczna*, jeśli $A^T = -A$.

Pokaż, że dla n nieparzystego macierz antysymetryczna rozmiaru $n \times n$ nie jest odwracalna.

Zadanie 6.
[2 punkty] Podaj definicję macierzy odwracalnej i macierzy odwrotnej.
[2 punkty] Wyraź macierz odwrotną przy użyciu wyznaczników odpowiednich minorów.
[6 punktów] Dla macierzy M niech I będzie podzbiorem zbioru indeksów wierszy, zaś J: kolumn. Przez $M_{I,J}$ oznaczmy macierz powstałą z M przez wybranie wierszy z I oraz kolumn z J i usunięcie pozostałych wierszy i kolumn (tj. odpowiedni minor). Dodatkowo, niech $\overline{I}$ oznacza dopełnienie I w zbiorze indeksów wierszy, zaś $\overline{J}$ dopełnienie J w zbiorze indeksów kolumn.

Niech $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, takie że $|I| = |J|$. Rozważmy macierz M kwadratową rozmiaru $n \times n$ taką że $M_{I,\overline{J}}$ oraz $M_{\overline{I},J}$ zawierają same 0. Niech $M_1 = M_{I,J}$, $M_2 = M_{\overline{I},\overline{J}}$ będą odwracalne. Pokaż, że

- M jest odwracalna;
- ${M^{-1}}_{J,I} = M_1^{-1}$ oraz ${M^{-1}}_{\overline{J},\overline{I}} = M_2^{-1}$;
- ${M^{-1}}_{\overline{J},I}$, ${M^{-1}}_{J,\overline{I}}$ są macierzami zerowymi.

Wskazówka: Uogólnienie zależności $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.