Lista 1

1 Ciała, przestrzenie liniowe, liniowa niezależność, eliminacja Gaußa

1.1 Ciała

Zadanie 1. Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ istnieje element odwrotny, tj. dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p$ różnego od 0 istnieje a^{-1} takie że $a \cdot a^{-1} = 1$. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

1.2 Przestrzenie liniowe

Zadanie 2. Niech M będzie zbiorem skończonym. Na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + V := V \triangle U, \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \triangle V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$. Pokaż, że tak określony zbiór jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

1.3 Podprzestrzenie liniowe

Zadanie 3. Niech V — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $S, T \leq V$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Zdefiniujmy $S \cap T, S + T \subseteq V$ z operacjami takimi, jak w V:

- $S \cap T$ jako zbiór to $S \cap T$ (przecięcie/iloczyn przestrzeni liniowych)
- $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ (suma przestrzeni liniowych)

Pokaż, że $S \cap T$ oraz $S + T$ są odpowiednio: największą przestrzenią zawartą w S i T oraz najmniejszą zawierającą S i T.

Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych S, T nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $S \times T$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

1. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 0\}$
2. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
6. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

Zadanie 5. Pokaż, że zbiór funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ \text{zbiór } \{r \ : \ f(r) \neq 0\} \text{ jest przeliczalny}\}$$

jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Zadanie 6. Pokaż, że zbiór funkcji

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ : \ |f(\mathbb{R})| \text{ jest skończony}\}$$

jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. ($f(A)$ rozumiemy jako $\{f(a) \ : \ a \in A\}$.)

Zadanie 7. Pokaż, że każda podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^2$ jest jednej z postaci:

- jedynie wektor zerowy: $\{\vec{0}\}$
- wielokrotności ustalonego wektora z $\mathbb{R}^2$ (czyli wektory stanowiace prostą przechodzącą przez $(0,0)$)
- całe $\mathbb{R}^2$.

1.4 Kombinacje liniowe wektorów

Zadanie 8. Niech V, przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, $A = \{v_1, v_2 \ldots, v_k\} \subseteq V$ zbiór wektorów, zaś $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ciąg skalarów, takich że $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\mathrm{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_2 \ldots, v_k\right\}\right) = \mathrm{LIN}\left(\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}\right).$$

Zadanie 9. Przedstaw wektor w jako kombinację podanych wektorów v_1, v_2, $\ldots$, v_k (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

1. $w = (1,5)$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,0)$.
2. $w = (5,10,11)$, $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,3,2)$, $v_3 = (1,1,1)$.
3. $w = (5,10,11)$, $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,3,2)$, $v_3 = (1,8,7)$.
4. $w = (4,17,18)$, $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,3,2)$, $v_3 = (3,9,11)$.

Zadanie 10. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1,2,1),(2,1,1))$? A ile do $\mathrm{LIN}((1,2,1),(2,1,2))$?

Lista 2

Zadanie 1. Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$):

- Zbiór B jest liniowo niezależny.
- Wektor $\vec{\mathbf{0}}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Pewien wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.
- Każdy wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z B.

Zaneguj powyższe warunki, aby uzyskać charakteryzację zbiorów liniowo zależnych.

2 Baza przestrzeni liniowej, Wymiar

2.1 Eliminacja Gaußa

Zadanie 2. Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1);$
- $(2, 3, -4, -1), (1, -2, 1, 3);$
- $(4, 3, -1, 1, 1), (2, 1, -3, 2, -5), (1, -3, 0, 1, -2), (1, 5, 2, -2, 6);$
- $(2, 3, 5, -4, 1), (1, -1, 2, 3, 5).$

Zadanie 3. Dla poniższych zbiorów wektorów sprawdź, czy są one bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Jeśli nie, to wybierz z nich maksymalny zbiór liniowo niezależny X i podaj dowolny zbiór wektorów Y, taki że $X \cup Y$ jest bazą.

- $\{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 4, 1), (0, 0, 1, 0)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$
- $\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, -2)\}$

Zadanie 4. Rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiory wektorów

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo niezależne?

a: Można bezpośrednio z definicji, ale szybciej: zauważ, że $v_1, \ldots, v_n$ są bazą przestrzeni
akiej). Można na nich zastosować eliminację Gauβa.

2.2 Baza

Zadanie 5 (Twierdzenie Steinitza o wymianie)**.** Udowodnij Twierdzenie Steinitza o wymianie:

Załóżmy, że V jest przestrzenią skończenie-wymiarową. Niech U—zbiór liniowo niezależny a B jest skończoną bazą V. Pokaż, że albo U jest bazą, albo istnieje $v \in B$, taki że $\{v\} \cup U$ jest liniowo niezależny.

2.3 Wymiar

Zadanie 6. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych U, V (będących podprzestrzeniami W) zachodzi

$$\dim(U + V) = 1 + \dim(U \cap V) \ .$$

Udowodnij, że suma $U + V$ jest jedną z przestrzeni U, V, a przecięcie $U \cap V$—drugą.

Zadanie 7. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

- $S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
- $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3)\}$, $T = \{(1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1)\}$;
- $S = \{(2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}$, $T = \{(3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0)\}$.

Zadanie 8. *Uwaga: w tym zadaniu nie można korzystać z twierdzenia o równoliczności baz ani z lematu o wymianie.*

Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:
Jeśli $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej V, to zbiór liczący $k + 1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraź wektory $v_1, \ldots, v_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa.

Wywnioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne.

2.4 Warstwy

Zadanie 9. Niech $W \leq V$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq V$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $u \in V$, taki że $U = u + W$;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U = u + W$;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + W$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $u \in V$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $u \in U$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 10. Niech $V' \leq V$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset \ .$$

Możesz skorzystać z Zadania 9, nawet jeśli nie potrafisz go udowodnić.

Lista 3

Zadanie 1. Niech V będzie przestrzenią liniową, $W, W' \leq V$ jej podprzestrzeniami, zaś U i U' warstwami tych podprzestrzeni.

Pokaż, że ich przecięcie $U \cap U'$ jest puste lub jest warstwą podprzestrzeni $W \cap W'$.

3 Przekształcenia liniowe

Zadanie 2. Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- $G(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Wskazówka: Możesz skorzystać z faktu: jeśli $F : V \to W$ oraz $\mathrm{LIN}(b_1, \ldots, b_k) = V$ to $\mathrm{LIN}(F(v_1), \ldots, F(v_k)) = \mathrm{Im}\, F$.

Zadanie 3. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x, y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$,
- $L'(x, y, z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$,
- $L''(x, y, z) = (x + y + z, -2x - z, -2y - z)$.

Dla tych z powyższych przekształceń, które są liniowe znajdź ich rzędy oraz opisz jądra i obrazy.

Zadanie 4. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $F : V \to \mathbb{F}$ niezerowym (tj. istnieje $v \in V$ takie że $F(v) \neq \vec{\mathbf{0}}$) przekształceniem liniowym (takie przekształcenia nazywamy *funkcjonałami liniowymi*).

- Jaki jest wymiar jądra $\ker F$?
- Ustalmy dowolny wektor $w \in V \setminus \ker F$. Pokaż, że $\mathrm{LIN}(\ker F \cup \{w\}) = V$.
- Niech F, G będą dowolnymi funkcjonałami liniowymi na V o tym samym jądrze, tj. $\ker F = \ker G$. Korzystając z poprzedniego punktu pokaż, że wtedy istnieje $\beta \in \mathbb{F}$, taka że $F = \beta G$.

Zadanie 5. Dla przestrzeni liniowych $\mathbb{F}^n$ oraz $\mathbb{F}^m$ nad ciałem $\mathbb{F}$, *funkcjonałem dwuliniowym* nazywamy dowolną funkcję $F : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$, taką że dla dowolnych $v \in \mathbb{F}^n, w \in \mathbb{F}^m$ funkcje $F_v : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$ oraz $F_w : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ zadane odpowiednio jako $F_v(y) = F(v, y)$ oraz $F_w(x) = F(x, w)$ są funkcjonałami liniowymi.

Pokaż, że dla dowolnych funkcjonałów liniowych $F_i : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ oraz $G_i : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, funkcja $H : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$ zdefiniowana wzorem

$$H((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) = \sum_{i=1}^{k} F_i((x_1, \ldots, x_n)) G_i((y_1, \ldots, y_m))$$

jest funkcjonałem dwuliniowym.

Zadanie 6. Niech $F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ będzie funkcjonałem liniowym. Pokaż, że istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takie że

$$F((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad .$$

Podobnie, niech $G : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym. Pokaż, że istnieją $\{\alpha_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ z ciała $\mathbb{F}$ takie że

$$G((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i y_j \quad .$$

Wskazówka: Wystarczy zadać F na bazie standardowej.

Zadanie 7. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} \quad ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\operatorname{Im} F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Wskazówka: Możesz skorzystać ze wskazówki do zadania 6 oraz (nieudowodnionego) twierdzenia mówiącego, że $\dim(V) = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{Im} F)$.

Zadanie 8. Dane jest przekształcenie liniowe $F : V \to W$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\dim(\operatorname{Im}(F)) = \dim(V)$.

Zadanie 9. Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(v) = \vec{\mathbf{0}}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(v) = \vec{\mathbf{0}}$, dla każdego wektora v.

Udowodnij uogólnienie tego faktu:
Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(v) = \vec{\mathbf{0}}$ dla dowolnego v, to zachodzi również $L^n(v) = \vec{\mathbf{0}}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $v, L(v), L^2(v), \dots, L^n(v)$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 10. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem, niech mają one wymiary, odpowiednio, m, n. Pokaż, że przestrzeń liniowa przekształceń liniowych z V w W ma wymiar $m \cdot n$.

Wskazówka: Dla baz $v_1, \dots, v_m$, $w_1, \dots, w_n$ rozważ przekształcenia $F_{i,j}$, takie że $F_{i,j}(v_k) = \vec{\mathbf{0}}$ dla $i \neq k$ oraz $F_{i,j}(v_i) = w_j$.

Zadanie 11 (Nierówność Frobeniusa; Nie liczy się do podstawy.)**.** Udowodnij, że dla dowolnych przekształceń liniowych F, G, H (o odpowiednich dziedzinach i przeciwdziedzinach) zachodzi:

$$\operatorname{rk}(FG) + \operatorname{rk}(GH) \leq \operatorname{rk}(G) + \operatorname{rk}(FGH) \quad .$$

Lista 4

4 Macierze

4.1 Macierze: definicje i podstawowe operacje

Zadanie 1. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} &= B \\
A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\
(A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\
\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B &= A \cdot (\alpha B) \\
A[B|C] &= [AB|AC] \\
\begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix} A &= \begin{bmatrix} BA \\ \hline CA \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zadanie 2. Pokaż, że

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad .$$

Zadanie 3. Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \quad .$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależność:

$$f_{n+k} = f_{k-1} f_n + f_k f_{n+1} = f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n.$$

Zadanie 4. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n \quad .$$

Wskazówka: Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp..

Zadanie 5. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Wskazówka: Można na palcach, ale można też prawie bez rachunków: zauważ, że każda macierz komutuje z Id oraz M komutuje z M. Oblicz też wymiar przestrzeni tych macierzy.

Zadanie 7 (Macierze symetryczne)**.** Kwadratową macierz $M = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ nazywamy *symetryczną*, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$ dla każdego i, j (innymi słowy: $M^T = M$).

Niech M, N będą macierzami symetrycznymi rozmiaru $n \times n$. Pokaż, że:

- $M+N$ jest macierzą symetryczną;
- MN jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy gdy M, N komutują (tj. $MN = NM$).

Zadanie 8. Niech M, N będą macierzami górnotrójkątnymi. Pokaż, że:

- ich suma $M+N$ też jest macierzą górnotrójkątną;
- ich iloczyn też jest macierzą górnotrójkątną.

Pokaż też analogiczną własność macierzy dolnotrójkątnych.

4.2 Macierze jako przekształcenie liniowe

Zadanie 9. Wyznacz bazy: obrazu i jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 10. Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Pokaż, że:

- $\ker(L_M) \subseteq \ker(L_{M^2})$, gdzie L_M to przekształcenie $v \mapsto Mv$, analogicznie L_{M^2};
- $\mathrm{rk}(M + M^2) \leq \mathrm{rk}(M)$.

Zadanie 11 (Nie takie trudne, ale powiedzmy, że nie liczy się do podstawy)**.** Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$.

Lista 5

4.3 Macierze odwracalne

Zadanie 1. Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.

Pokaż też, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy przekątniowej.

Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że używając eliminacji Gaussa można sprowadzić macierz odwracalną do macierzy diagonalnej. Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje. Dla macierzy nieodwracalnej skorzystaj z faktu używającego jednocześnie eliminacji na kolumnach i wierszach, potem postępuj podobnie.

Zadanie 2. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 3. Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnotrójkątną/symetryczną/diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątna/górnotrójkątna/symetryczna/diagonalna.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli A jest macierzą odwracalną a B macierzą odpowiedniego rozmiaru (tzn. taką, że mnożenie AB jest określone) to

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) \ .$$

Zadanie 5. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

5 Macierz przekształcenia liniowego w bazie.

Zadanie 6. Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;
- obrót przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara);
- symetrii $\mathbb{R}^2$ względem prostej zadanej równaniem $y = 2x$.

Zadanie 7. Niech V będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopnia najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów x^0, x^1, x^2, x^3 oraz $x^0, x^0 + x^1, x^0 + x^1 + x^2, x^0 + x^1 + x^2 + x^3$. Udowodnij, że są one bazami. Zapisz macierz przejścia między tymi bazami.

Rozważmy przekształcenie $F : V \to V$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w dwóch podanych powyżej bazach.

6 Wyznacznik

Zadanie 8. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Zadanie 9. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 10. Na wykładzie podany był dowód rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny. Uogólnij ten dowód na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaże, że dla dowolnego j zachodzi

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

oraz dla dowolnego i zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}),$$

gdzie $A_{i,j}$ jest minorem powstałym przez wykreślenie z macierzy A jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Wskazówka: Wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.

Zadanie 11 (Alternatywny dowód tw. Cauchy'ego; nie liczy się do podstawy)**.** Zadanie to polega na pokazaniu alternatywnego dowodu tw. Cauchy'ego.

Niech A, B, C będą macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie $C = AB$ oraz $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = n$.

Rozważ macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$. Ile wynosi jej wyznacznik?

Pokaż, że przy pomocy operacji kolumnowych (tj. zamiany kolumn i dodawania do kolumny wielokrotności innej kolumny) można macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$ przekształcić do macierzy $\begin{bmatrix} A & C \\ -\mathrm{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a tą do macierzy $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\mathrm{Id} \end{bmatrix}$. Ile wynosi wyznacznik tej macierzy?

Lista 6

Zadanie 1. Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

Wskazówka: $\mathbb{Z}_{17}$ i metoda eliminacji.

Zadanie 2. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$. Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

Zadanie 3. Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 4. Pokaż, że układ równań uzyskany przez

- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$

jest równoważny wejściowemu.

Wskazówka: Można na palcach, ale prościej jest zinterpretować to jako wierszowe operacje elementarne, które są odwracalne.

Zadanie 5. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases}.$$

Zadanie 6. Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru p):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} p & p & p \\ 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8. Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Zadanie 9. Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od parametru λ.

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10. Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\begin{cases} & x_1 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_4 & = & 0 \\ -x_1+ & x_3 & -x_5 & = & 0 \\ -x_2+ & x_4 & -x_6 & = & 0 \\ & -x_3 & +x_5 & = & 0 \\ & -x_4 & +x_6 & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} & x_1 & +x_2 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & +x_{n-1} & +x_n & = & 0 \\ & x_{n-1} & +x_n & = & 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

Lista 7

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy M, to odpowiadające im wektory własne $v_1, v_2, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne.

Wskazówka: Pokaż przez indukcję po ℓ, że v_ℓ jest liniowo niezależny od $\{v_1, \ldots, v_{\ell-1}\}$.

Zadanie 2. Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A to λ^k jest wartością własną A^k.

Zadanie 3. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

$$L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z) \quad \text{oraz} \quad L((x, y, z)) = (0, 0, y) \ .$$

Zadanie 4. Znajdź wartości własne macierzy (nad $\mathbb{R}$), podaj ich krotności geometryczne i algebraiczne:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dla jednej z nich oblicz odpowiadające wektory własne.

Zadanie 5. Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne przekształcenia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$L(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0) \ .$$

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M wa wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Zadanie 7. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ

- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

Wskazówka: $\det(A) = \det(A^T)$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$.

Zadanie 8 (Nie liczy się do podstawy)**.** Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B, które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie udowodnij (eliminacja Gaußa), że każda macierz M jest iloczynem macierzy elementarnych oraz macierzy ww. postaci.

Zadanie 9. Niech $A : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A.

Zadanie 10. Sprawdź, które z poniższych macierzy są diagonalizowalne.

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 11. Dla wielomianu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ możemy zdefiniować naturalnie wartość tego wielomianu na macierzy kwadratowej, jako $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{k} a_i M^i$, gdzie $M^0 = \mathrm{Id}$.

Niech $M = AJA^{-1}$, gdzie J jest macierzą Jordana (tzn. na przekątnej ma klatki Jordana), zaś φ_M jej wielomianem charakterystycznym. Pokaż, że $\varphi_M(M)$ jest macierzą zerową.

(W pełnej ogólności to zadanie powinno mówić, że A, J są macierzami nad $\mathbb{C}$, ale w zasadzie nic nie zmienia to w dowodzie: wystarczy, że pokażesz to dla $\mathbb{R}$.)

Lista 8

Zadanie 1. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, tj. dla wektorów $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad .$$

Pokaż, że

$$\left[\langle u, v \rangle \right] = u^T v \quad .$$

(Formalnie $\langle u, v \rangle$ jest liczbą, a $u^T v$ macierzą, ale staramy się ignorować takie drobnostki.)

Wywnioskuj z tego, że dla dowolnej macierzy M zachodzi

$$\langle u, Mv \rangle = \left\langle M^T u, v \right\rangle \quad .$$

Zadanie 2. Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$) wymiaru $n \times n$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\langle u, Mv \rangle = \langle Mu, v \rangle$$

(możesz skorzystać z Zadania 1).

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych v oraz v', to $\langle v, v' \rangle = 0$, tj. v i v' są prostopadłe.

Zadanie 3. Niech $B = v_1, \dots, v_n$ będzie bazą ortonormalną V a $v \in V$ dowolnym wektorem w V. Pokaż, że jeśli $[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ to

$$||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \quad .$$

Zadanie 4 (Nierówność Bessela; równość Parsevala)**.** Niech $\{e_1, \dots, e_k\}$ będą układem ortonormalnym, tj.:

- $\forall i \, \langle e_i, e_i \rangle = 1$;
- $\forall i \neq j \, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą).

Pokaż, że dla dowolnego wektora v:

$$\sum_{i=1}^{k} | \langle e_i, v \rangle |^2 \leq ||v||^2$$

i równość dla każdego v implikuje, że $\{e_1, \dots, e_k\}$ jest bazą.

Zadanie 5 (Macierz Grama, nie liczy się do podstawy)**.** Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{v_1, \dots, v_k\}$ w przestrzeni V z iloczynem skalarnym jako

$$G(A) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} \quad .$$

Udowodnij, że

- $\det(G(A))$ jest nieujemny
- $\det(G(A)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest liniowo zależny.

Wskazówka: Co dzieje się z macierzą Grama, gdy ortonormalizujemy ten układ wektorów? Alternatywnie: spróbuj przedstawić tę macierz jako iloczyn AA^T. Macierz A reprezentuje jakoś wektory $v_1, \dots, v_k$.

Zadanie 6. Niech V będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{R}$, zaś $V_1, V_2 \leq V$ jej podprzestrzeniami (z tym samym iloczynem skalarnym). Pokaż, że:

- $V_1 \leq V_2 \iff V_1^\perp \geq V_2^\perp$,
- $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$,
- $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$.

Zadanie 7. Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\mathrm{d}x \quad .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany x^3 oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

Wskazówka: Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 8. Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Zadanie 9. Dokonaj ortonormalizacji baz:

- $(1, 2, 2), (1, 1, -5), (3, 2, 8)$;
- $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 1)$.

Zadanie 10. Niech V: przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym, B: baza V, a $F : V \to V$: przekształcenie liniowe. Pokaż, że F jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{u,v \in B} \, \langle F(u), F(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad .$$

Tj. gdy F zachowuje iloczyn skalarny wektorów z bazy.

Zadanie 11. Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.

- obrót o kąt α na płaszczyźnie
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną. (Przez „współrzędne" rozumiemy standardowe współrzędne $\mathbb{R}^n$.)

Lista 9

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli M jest macierzą ortogonalną, to $\det(M) \in \{-1, 1\}$. Wywnioskuj z tego, że jeśli F jest izometrią, to $\det F \in \{-1, 1\}$.

Zadanie 2. Niech $b_1, \ldots, b_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$) ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$ o elementach z $\mathbb{R}$.

Pokaż, że M jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych i, j

$$\langle b_i, b_j \rangle = \langle M b_i, M b_j \rangle \quad .$$

Zadanie 3 (Nierówność Hadamarda, nie liczy się do podstawy)**.** Niech $M = [C_1 | C_2 | \cdots | C_n]$ będzie macierzą kwadratową a $C_1, \ldots, C_n$ jej kolumnami. Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} ||C_i|| \quad ,$$

gdzie $|| \cdot ||$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym. Pokaż też, że jeśli M jest ortogonalna, to obie strony są równe.

Wskazówka: Potraktuj kolumny M jako wektory i przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje ze stronami równości?

Zadanie 4. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 5. Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $B^T B$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} .$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz B możesz wziąć macierz M_{EA}, gdzie E to baza standardowa, zaś A: baza ortonormalna.

Zadanie 6. Pokaż, że:

- suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
- macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.

Zadanie 7. Niech $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą dodatnio określoną. Udowodnij, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} m_{ii} \quad .$$

Wskazówka: Skorzystaj z nierówności Hadamarda.

Zadanie 8. Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

,

$\cdot$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

,

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	b	a	c

,

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	b	a	c

.

Zadanie 9. Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

Zadanie 10. Rozważamy trzy grupy:

1. grupą symetrii trójkąta równobocznego (trzy obroty i trzy symetrie osiowe),
2. grupą obrotów sześciokąta foremnego,
3. grupą $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem $\bmod 6$).

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?

Zadanie 11. Pokaż, że $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Pokaż, że równość

$$(ab)^r = a^r b^r$$

zachodzi dla dowolnego r (naturalnego) oraz dowolnych $a, b \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest przemienna.

Lista 10

Zadanie 1. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzyelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?

Zadanie 2. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G.

- Pokaż, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G.
- Pokaż, że jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G, to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$.
- Pokaż, że jeśli G jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1 h_2 \ : \ h_1 \in H_1, \ h_2 \in H_2\}$.
  (Dla przypomnienia: $\langle A \rangle$ to najmniejsza grupa generowana przez A.)
- Jeśli $\{H_i\}_{i \in I}$ jest dowolną kolekcją podgrup G, to również $\bigcap_{i \in I} H_i$ jest podgrupą G.

Zadanie 3. Centralizatorem elementu a w grupie G nazywamy zbiór elementów przemiennych z a, czyli

$$G(a) = \{b \in G \ : \ ab = ba\} \ .$$

Centrum grupy G nazywamy zbiór

$$Z(G) = \{a \ : \ \forall b \in G : \ ab = ba\}$$

(czyli: przemiennych ze wszystkimi elementami w G). Udowodnij, że dla dowolnej grupy G i elementu a centralizator $G(a)$ oraz centrum $Z(G)$ są podgrupami G. Pokaż też, że

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} G(g) \ .$$

Zadanie 4. Czy zbiór $\{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ z działaniem składania permutacji jest podgrupą grupy S_4? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzyelementowe to czy otrzymamy podgrupą S_4?

Zadanie 5. Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:

- $\langle (i, i+1); (1, 2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n-1$;
- $\langle (1, 2); (2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$.

Zadanie 6 (Grupa alternująca)**.** Udowodnij, że jeśli G jest podgrupą grupy permutacji S_n to

- zbiór G_p permutacji parzystych z G jest podgrupą G;
- $|G_p| = |G|$ lub $|G_p| = \frac{|G|}{2}$.

W przypadku, gdy $G = S_n$ to ta podgrupa G_p to grupa alternująca A_n.

Zadanie 7. Dla macierzy $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ rozpatrzmy funkcje:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \ ,$$

$$f'((a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \ .$$

Pokaż, że obie definiują wyznacznik.

Wskazówka: Możesz np. sprawdzić, że spełnia aksjomaty wyznacznika. Tylko zamiana kolumn jest nietrywialna: rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

Zadanie 8. Pokaż, że każda permutacja z A_n (czyli permutacja parzysta) jest złożeniem cykli trzyelementowych.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że iloczyn dwóch transpozycji da się przedstawić jako złożenie najwyżej dwóch takich cykli.

Zadanie 9. Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

podaj permutację odwrotną σ^{-1}; rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Podaj rząd σ oraz σ^{-1}. Określ ich parzystość.

Zadanie 10.

- Wyznacz permutacje odwrotne do permutacji $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Przedstaw permutację $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ jako złożenie cykli rozłącznych.
- Przedstaw permutacje $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ jako złożenia transpozycji.
- Jakie są rzędy permutacji z powyższych podpunktów?

Lista 11

Zadanie 1. Znajdź grupę obrotów sześcianu.

Wskazówka: Oblicz rząd grupy używając zależności $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$; każdy obrót ma naturalną interpretację.

Zadanie 2. Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremnego, sześcianu foremnego, ośmiościanu foremnego, dwunastościanu foremnego, dwudziestościanu foremnego.

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 3 (Grupa dihedralna)**.** Rozpatrzmy grupę obrotów i odbić n-kąta foremnego (nazywamy ją *grupą dihedralną* D_n). Ile ma ona elementów? Pokaż, że nie ma innych przekształceń zachowujących ten wielokąt (tj. przekształceń z wierzchołków w wierzchołki, które zachowują sąsiedztwo wierzchołków).

Wskazówka: $|O_c| \cdot |G_c| = |G|$.

Zadanie 4. W grupie S_{10} rozpatrzmy grupy generowane przez

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
3. $(1, 6, 9)(2, 10)(3, 4, 5, 7, 8)$.

Dla każdego elementu ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ wyznacz jego orbitę oraz stabilizator dla naturalnego działania działania tych podgrup na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Zadanie 5. Rozpatrzmy kwadraty, w których malujemy wierzchołki na biało lub czerwono. Dwa kwadraty uznajemy za identyczne, jeśli można je przekształcić na siebie przez obrót. Ile jest rozróżnialnych kwadratów mających

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

wierzchołków białych? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli dopuścimy też symetrie kwadratu?

Zadanie 6. W pięciokącie foremnym prowadzimy wszystkie pięć przekątnych. Dzielą one ten pięciokąt na dziesięć trójkątów oraz jeden (mniejszy) pięciokąt foremny. Każdą z tych jedenastu figur kolorujemy na jeden z pięciu (różnych) kolorów. Uzyskaną figurę możemy obracać oraz przekładać na drugą stronę (czyli działać na niej grupą obrotów i symetrii pięciokąta foremnego). Ile jest rozróżnialnych (ze względu na obroty i symetrie) takich kolorowań tej figury przy użyciu pięciu kolorów?

Zadanie 7. W grupie obrotów kwadratu opisz warstwy (prawostronne i lewostronne) podgrupy generowanej przez obrót o 180^0.

W grupie obrotów i symetrii kwadratu opisz warstwy (prawostronne i lewostronne) podgrupy generowanej przez

- obrót o 180^0.
- obrót o 90^0.
- symetrię wzdłuż przekątnej (wybierz dowolną).

Zadanie 8. Opisz warstwy lewostronne i prawostronne podgrupy S_3 w S_4. Czy potrafisz uogólnić tę obserwację na dowolne $S_{n-1} \leq S_n$?

Wskazówka: Można na palcach, ale zastanów się, co się dzieje z obrazem/przeciwobrazem *4*?

Zadanie 9 (Nie liczy się do podstawy)**.** Pokaż, że dla dwóch permutacji σ, τ permutacja $\tau^{-1}\sigma\tau$ ma taki sam rozkład na cykle, jak permutacja σ.

Korzystając z tego faktu pokaż, że podgrupa $\{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \leq S_4$ jest podgrupą normalną (w S_4). Wybierz dwie nietrywialne warstwy i wymnóż je jako elementy grupy ilorazowej.

Zadanie 10. Znajdź wszystkie podgrupy normalne w grupie obrotów i odbić kwadratu. Dla najmniej licznej z nich podaj tabelę działań w grupie ilorazowej (tj. grupie warstw podgrupy normalne).

Zadanie 11. Załóżmy, że H jest podgrupą G, a N podgrupą normalną G. Pokaż, że wtedy

$$HN = \{hn \,:\, h \in H,\, n \in N\}$$

jest podgrupą G.

Załóżmy, że grupy N_1, N_2 są normalne w G. Pokaż, że N_1N_2 jest podgrupą normalną.

Lista 12

Zadanie 1. Wykonaj poniższe obliczenia modulo 3 oraz 5. Oznaczenie 62^{-1} oznacza element odwrotny do $62 \mod 3$ w $\mathbb{Z}_3$ (analogicznie w $\mathbb{Z}_5$).

- $-(125 \cdot 18 + 32 \cdot 49)^{-1} \cdot (75 \cdot 27 - 16 \cdot 7) + (77 \cdot 22^{-1} - 18 \cdot 255)$;
- $15^7 - 343^{12} \cdot 241^4 + 175 \cdot 123 - (176^{-1})^4 \cdot 121^2$.

Zadanie 2. Rozpatrz działanie algorytmu Euklidesa na dwóch kolejnych liczbach Fibonacciego. Jak wygląda para liczb trzymanych po k-tym kroku? Udowodnij, że dla pary liczb (F_{n+1}, F_{n+2}) algorytm wykonuje przynajmniej n kroków.

Pokaż, że algorytm Euklidesa (w którym zastępujemy a przez $a \mod b$, a nie a przez $a - b$) wykonuje $\mathcal{O}(\log(a) + \log(b))$ kroków.

Wskazówka: Pokaż, że w jednym kroku któraś z liczb zmniejsza się o połowę.

Zadanie 3. Uogólnij algorytm Euklidesa dla większej liczby liczb $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Pokaż, że $\text{nwd}(m_1, \ldots, m_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i m_i$ dla pewnych liczb całkowitych x_i.

Wskazówka: Rozważ, co zwraca algorytm Euklidesa dla dwóch liczb m_1 oraz $m_2 m_3 \cdots m_k$. Rekurencyjnie postępuj dla $m_2 m_3 \cdots m_k$.

Zadanie 4. Pokaż, że dla liczb całkowitych $a, b > 0$ są dokładnie dwie pary liczb całkowitych (x, y), takich że:

- $xa + yb = \text{nwd}(a, b)$ oraz
- $|x| < \frac{b}{\text{nwd}(a,b)}$, $|y| < \frac{a}{\text{nwd}(a,b)}$.

Pokaż ponadto, że w jednej z tych par x jest dodatnie, a y niedodatnie, zaś w drugiej odwrotnie.

Wskazówka: Wydziel najpierw przez $\text{nwd}(a, b)$.

Zadanie 5. Oblicz nwd dla następujących par liczb. Przedstaw je jako kombinację liniową (o współczynnikach całkowitych) tych liczb.

$$\{743, 342\}, \{3812, 71\}, \{1234, 321\}.$$

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli n, m są względnie pierwsze, to $\varphi(nm) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.

Wskazówka: Możesz z Chińskiego tw. o resztach; da się też „na palcach”, ale nie jest to takie łatwe.

Zadanie 7. Ile wynosi $\varphi(p^k)$, gdzie p jest liczbą pierwszą a $k \geq 1$? Używając Zadania 6, określ, ile wynosi $\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})$ dla $p_1, p_2, \ldots, p_k$—różnych liczb pierwszych.

Zadanie 8. Oblicz φ dla następujących liczb: $7, 9, 27, 77, 143, 105$. Możesz skorzystać z Zadania 7.

Zadanie 9. Przypomnijmy, że Chińskie twierdzenie o resztach mówi, że gdy $m_1, m_2, \ldots, m_k$ są parami względnie pierwsze, to naturalny homomorfizm z $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2 \cdots m_k}$ w $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ jest izomorfizmem.

Pokaż, że obrazem $\mathbb{Z}^*_{m_1 \cdot m_2 \cdots m_k}$ (czyli elementów odwracalnych w $\mathbb{Z}_{m_1 \cdot m_2 \cdots m_k}$) tego izomorfizmu jest $\mathbb{Z}^*_{m_1} \times \mathbb{Z}^*_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}^*_{m_k}$.

Zadanie 10. Podaj dowolne rozwiązanie w liczbach naturalnych poniższych układów równań.

$$\begin{cases} x \mod 7 = 2 \\ x \mod 5 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \mod 7 = 1 \\ x \mod 5 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \mod 9 = 5 \\ x \mod 11 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \mod 9 = 8 \\ x \mod 11 = 3 \end{cases} .$$

Lista 13

Zadanie 1. Wyznacz największy wspólny dzielnik par wielomianów (o ile nie jest napisane inaczej: w $\mathbb{R}[x]$)

- $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ oraz $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$;
- $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 4$ oraz $x^4 + 4$ (w $\mathbb{Z}_5[x]$);
- $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 8x + 60$ oraz $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$;
- $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$ oraz $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$ (w $\mathbb{Z}_3[x]$).

W którymś z przykładów wyraź nwd jako kombinację podanych wielomianów.

Zadanie 2. Wyznacz $f+g$, $f \cdot g$ dla podanych wielomianów f, g. Podziel też podane pary wielomianów. (O ile nie jest napisane inaczej: w $\mathbb{R}[x]$):

- $f = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 10$, $g = x^2 - 4$;
- $f = x^4 + 4x^3 - x^2 - 15x - 11$, $g = x^2 - 4x + 3$;
- $f = x^4 + 1$, $g = x^2 + 3x + 2$ (w $\mathbb{Z}_5[X]$);
- $f = x^2 + 1$, $g = x + 1$ (w $\mathbb{Z}_2[X]$);
- $f = x^p + 1$, $g = x + 1$ (w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla p—pierwszego).

Wskazówka: Do ostatniego: policz, ile wynosi $(x+1)^p$ w $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem zaś $\mathbb{F}[x]$ pierścieniem wielomianów o współczynnikach z tego ciała. Udowodnij, że każdy wielomian $f \in \mathbb{F}[x]$ da się przedstawić jednoznacznie (z dokładnością do kolejności czynników) w postaci $f = c \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$, gdzie $c \in \mathbb{F}$ jest stałą, a każde $f_i \in \mathbb{F}[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym o wiodącym współczynniku równym 1.

Wskazówka: Założenie o współczynniku równym 1 jest tylko po to, by uniknąć arbitralności w wyborze współczynnika wiodącego, co prowadzi do „różnych" rozkładów.

Zadanie 4. Udowodnij uogólnienia twierdzenia z wykładu:

Niech f będzie wielomianem nierozkładalnym a $p_1 p_2 \ldots p_\ell$ wielomianami w $\mathbb{F}[x]$ oraz $f^k | p_1 p_2 \ldots p_\ell$. Wtedy istnieją liczby $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$, takie że $\sum_i n_i \geq k$ oraz dla każdego i zachodzi $f^{n_i} | p_i$.

Zadanie 5. Korzystając z tw. Bezout rozłóż poniższe wielomiany z $\mathbb{Z}_2[x]$ na czynniki nierozkładalne

$$x^5 + x^3 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + x^2 + 1, \quad x^5 + x^2 + x, \quad x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 + x^2 + x \ .$$

Potraktuj powyższe wielomiany jako wielomiany z $\mathbb{Z}_3[x]$ i również rozłóż je na czynniki nierozkładalne.

Wskazówka: Być może konieczne też będzie osobne zastanowienie się, które wielomiany drugiego stopnia są nierozkładalne.

Zadanie 6. Wielomian f ma resztę z dzielenia przez $x - c_1$ równą r_1 oraz resztę z dzielenia przez $x - c_2$ równą r_2. Ile wynosi reszta z dzielenia f przez $(x - c_1)(x - c_2)$?

Wystarczy, że zapiszesz zależność na współczynniki tego wielomianu, nie musisz jej rozwiązywać.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. Bezout.

Zadanie 7. Oblicz wartości podanych wielomianów w odpowiednich pierścieniach:

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 1 \text{ w } 2, \text{ w } \mathbb{Z}_7; \quad 2x^3 - x^2 + x - 2 \text{ w } 1, \text{ w } \mathbb{Z}_3; \quad 3x^4 - 3x^3 + 4x - 5 \text{ w } 2, \text{ w } \mathbb{Z}_6$$

Zadanie 8. Niech f, g, f', g', a będą niezerowymi wielomianami z pierścienia wielomianów $\mathbb{F}[x]$. Załóżmy, że $f = af'$ oraz $g = ag'$.

- Jeśli $h' = \mathrm{nwd}(f', g')$, to ile wynosi $\mathrm{nwd}(f, g)$?
- Jeśli h', r' są ilorazem oraz resztą z dzielenia f' przez g', to ile wynosi iloraz, a ile reszta z dzielenia f przez g?

Zadanie 9. Dane są dwa niezerowe wielomiany $f, g \in \mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$. Załóżmy, że $f = f'f''$ oraz $\mathrm{nwd}(f', g) = 1$. Celem zadania jest pokazania, jak odtworzyć reprezentację $\mathrm{nwd}(f, g)$ jako kombinacji wielomianów f, g z analogicznych reprezentacji dla f'', g oraz f', g.

- Pokaż, że $\mathrm{nwd}(f, g) = \mathrm{nwd}(f'', g)$.
- Niech $\mathrm{nwd}(f'', g) = af'' + bg$ oraz $1 = \mathrm{nwd}(f', g) = cf' + dg$ dla odpowiednich wielomianów $a, b, c, d \in \mathbb{F}[x]$. Wyraź $\mathrm{nwd}(f, g)$ jako kombinację wielomianów f, g; kombinacja ta zapewne będzie używać wielomianów a, b, c, d, f'.

Zadanie 10. Wylicz resztę z dzielenia następujących wielomianów przez $x - c$ dla podanych wartości c (jeśli nie jest powiedziane inaczej: wielomiany są z $\mathbb{R}[x]$).

- $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$, $c \in \{0, 1, 2\}$;
- $2x^3 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $c \in \{1, 2, 3\}$;
- $4x^2 + 3x - 2$, $c \in \{-1, 0, 1\}$;
- $x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Lista 14

Zadanie 1. Celem tego zadania jest pokazanie, że wielomiany nierozkładalne w $\mathbb{R}[x]$ są stopnia najwyżej 2. Możesz korzystać z (nie tak prostego) twierdzenia, że wielomiany nierozkładalne nad $\mathbb{C}[x]$ są stopnia najwyżej 1. W tym zadaniu utożsamiamy wielomian z jego wartościowaniem a $\overline{x}$ będzie oznaczać sprzężenie (w $\mathbb{C}$) liczby zespolonej x.

Ustalmy wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$.

- Pokaż, że dla liczby zespolonej c zachodzi $f(\overline{c}) = \overline{f(c)}$.
- Wywnioskuj z tego, że jeśli $c \in \mathbb{C}$ jest miejscem zerowym wielomianu f, to jest nim też $\overline{c}$.
- Pokaż, że wielomian $(x-c)(x-\overline{c})$ ma współczynniki rzeczywiste.
- Wywnioskuj z tego, że jeśli f jest nierozkładalny (w $\mathbb{R}[x]$), to jest stopnia najwyżej 2.

Zadanie 2. Operację różniczkowania wielomianów nad dowolnym ciałem definiujemy tak jak w przypadku liczb rzeczywistych, tzn. $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

Udowodnij, że w dowolnym pierścieniu wielomianów o współczynnikach z ciała różniczkowanie ma te same własności, co w przypadku współczynników rzeczywistych, tzn.:

- jest liniowa: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathbb{F}[x]$
- $(fg)' = f'g + fg'$ dla $f, g \in \mathbb{F}[x]$.

Wskazówka: Przy dowodzeniu drugiego punktu skorzystaj z punktu pierwszego i sprowadź problem do przypadku, w którym $f = x^k$, $g = x^\ell$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla wielomianu $f \in \mathbb{F}[x]$ liczba $\alpha \in \mathbb{F}$ jest pierwiastkiem k-krotnym tego wielomianu wtedy i tylko wtedy gdy $\overline{f}(\alpha) = \overline{f'}(\alpha) = \overline{f''}(\alpha) = \cdots = \overline{f^{(k-1)}}(\alpha) = 0$.

Zadanie 4. Rozważmy wielomiany o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$. Dla jakich a, b wielomian

$$X^5 + aX^3 + b$$

ma pierwiastek podwójny (dopuszczamy większe krotności), jeśli

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$?
- $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$?
- $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5$?

Możesz skorzystać z Zadania 3, nawet jesli nie umiesz go udowodnić.

Wskazówka: Rozważ osobno przypadki $a = 0$ oraz $b = 0$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym o n elementach. Pokaż, że w $\mathbb{F}[x]$ prawdziwa jest zależność:

$$x^n - x = \prod_{a \in \mathbb{F}} (x - a)$$

Wskazówka: Porównaj pierwiastki obydwu wielomianów oraz ich wiodące współczynniki.

Zadanie 6. Znajdź wielomiany najniższego możliwego stopnia, spełniające warunki

- $\overline{f}(-1) = -12$, $\overline{f}(0) = -7$, $\overline{f}(1) = -6$ (w $\mathbb{R}$);
- $\overline{g}(0) = 3$, $\overline{g}(1) = 4$, $\overline{g}(4) = 3$ (w $\mathbb{Z}_5$);
- $\overline{h}(0) = 1$, $\overline{h}(1) = 2$, $\overline{g}(h) = 0$ (w $\mathbb{Z}_3$);
- $\overline{i}(1) = 3$, $\overline{i}(2) = 6$, $\overline{i}(4) = 2$ (w $\mathbb{Z}_7$);

- $\overline{j}(1) = 3$, $\overline{j}(2) = 10$, $\overline{j}(3) = 23$ (w $\mathbb{R}$).

Zadanie 7. Udowodnij, że nie istnieją kody korygujące błędy, które poprawiają więcej błędów, niż kody Reeda-Salomona.

W tym celu pokaż, że jeśli w $\mathbb{F}^k$, które traktujemy jako k-elementowe wektory elementów z $\mathbb{F}$, mamy wybrane $|\mathbb{F}|^n$ wektorów, to któreś dwa z nich różnią się na najwyżej $n - k + 1$ pozycjach.

Wskazówka: Podziel całe $\mathbb{F}^n$ na „stożki”: jeden stożek ma ustalone pierwsze k współrzędnych i dowolne $n - k$ dalsze współrzędne.

Zadanie 8. Opisz konstrukcję ciała o ośmiu elementach. Wskaż generator grupy multiplikatywnej (np. zgadując go i sprawdzając, że rzeczywiście jest generatorem).

Zadanie 9. Znajdź wszystkie wielomiany nierozkładalne stopnia 2 w $\mathbb{Z}_3[x]$. Dla każdego z nich opisz konstrukcję ciała o dziewięciu elementach. Wskaż izomorfizmy między tymi ciałami.

Zadanie 10. Na wykładzie wspomnieliśmy (bez dowodu), że dla liczby pierwszej p istnieje wielomian nierozkładalny stopnia m w $\mathbb{Z}_p[x]$. Udowodnij to stwierdzenie dla $m = 2$.

Wskazówka: Zlicz wszystkie wielomiany stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$ oraz wszystkie rozkładalne wielomiany stopnia 2 w $\mathbb{Z}_p[x]$: zauważ, że muszą się one rozkładać na wielomiany stopnia 1.