Algebra 2017/18 — Kolokwium 2

Czas: 120 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1. Dla danej poniżej permutacji σ podaj jej rozkład na cykle. Oblicz σ^{-1}, podaj jej rozkład na cykle. Czy σ jest permutacją parzystą? Czy σ^{-1} jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ, a jaki σ^{-1}?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 7 & 12 & 6 & 2 & 1 & 3 & 10 & 15 & 16 & 5 & 17 & 9 & 4 & 8 & 14 & 13 & 11 \end{pmatrix} .$$

Zadanie 2. Dane są wielomiany $f = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 - x$ oraz $g = x^4 - x^2 - 2x - 1$ o współczynnikach z $\mathbb{R}$. Podziel (z resztą) f przez g. Oblicz $\mathrm{nwd}(f, g)$ i przedstaw je w postaci $af + bg$ dla odpowiednich wielomianów a, b (o współczynnikach z $\mathbb{R}$).

Zadanie 3. Oblicz poniższe wyrażenia modulo 5 oraz modulo 7. Wyrażenie n^{-1} oznacza element odwrotny do n w odpowiednim $\mathbb{Z}_p$.

- $\left(353^{-35} + 124\right)^{36} \cdot \left(169^{10} \cdot 13^{-22} + 351^{148} \cdot (-34)^{-12}\right)^{120} + (-15)^{105} + (-21)^{105} + (-140)^5\, 5 + (-36)^{-91}$;
- $350^{12} + (-105)^{70} + \left(50^{20} \cdot 14^{40} + 181^{60}\right)^{-12} - \left(176^{-1}\right)^8 \cdot 121^4 + \left(33 \cdot 22^{-1} - 21 \cdot 255\right)^{121} + 770^{840}$.

Zadanie 4. Ile jest nierozróżnialnych, ze względu na obroty, czworościanów foremnych, w których każda ściana jest pokolorowana na jeden z 5 kolorów?

Możesz skorzystać (bez konieczności podawania dowodu) z podanej na ćwiczeniach informacji, ile tych obrotów jest. Dla ułatwienia: dla każdej pary przeciwległych boków istnieje obrót wzdłuż osi przechodzącej przez środki tych boków.

Zadanie 5. Niech G będzie grupą a $g \in G$ jest elementem. Udowodnij, że rzędy elementów:

- g
- g^{-1}
- hgh^{-1}, gdzie $h \in G$ jest dowolnym elementem G

są takie same. (W szczególności: jeśli jeden jest nieskończony, to wszystkie są nieskończone).

Zadanie 6. Niech $U \subseteq G$ będzie warstwą lewostronną grupy G. Pokaż, że jeśli $g_1, g_2, g_3 \in U$, to również $g_1 g_2^{-1} g_3 \in U$.

Udowodnij też własność odwrotną: jeśli niepusty podzbiór $\emptyset \neq U \subseteq G$ spełnia warunek:

$$g_1, g_2, g_3 \in U \implies g_1 g_2^{-1} g_3 \in U$$

to U jest warstwą pewnej podgrupy G.

Zadanie 7. Mówimy, że element a pierścienia R jest *idempotentny*, jeśli $a^2 = a$.

- Udowodnij, że jeśli R jest ciałem, to ma dokładnie dwa elementy idempotentne: 0 i 1. (Przypomnienie: ciała mają jeden dziwny aksjomat, który mówi, że $0 \neq 1$.)
- Udowodnij, że w $\mathbb{Z}_{mn}$, gdzie $m, n > 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, istnieją przynajmniej 4 elementy idempotentne.