Algebra 2017/18 — Kolokwium 1

Czas: 120 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej kartce.

W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1. Podaj wartości własne poniższej macierzy o elementach będącymi liczbami rzeczywistymi. Podaj ich krotności geometryczne i algebraiczne.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 2. Niech M_1, M_2 będą macierzami kwadratowymi. Rozważmy macierz klatkową M postaci:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & \\ & M_2 \end{bmatrix}$$

tzn. przekątna M pokrywa się z przekątnymi macierzy M_1, M_2, a poza tymi macierzami M ma same zera. Pokaż, że

$$\det(M) = \det(M_1) \cdot \det(M_2) \ .$$

Możesz korzystać z faktów pokazanych na wykładzie (algorytm obliczania wyznacznika, tw. Cauchy'ego, rozwinięcie Laplace'a, wartość wyznacznika macierzy przekątniowej, macierzy trójkątnej, macierzy odwrotnej itp.).

Uogólnij ten fakt na wiele macierzy, np. używając indukcji. Tzn. dla macierzy kwadratowych $M_1, \dots, M_k$ rozważamy macierz klatkową M postaci:

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{bmatrix}$$

zdefiniowaną analogicznie jak powyżej. Pokaż, że

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i) \ .$$

Zadanie 3. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{11}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{11}$.

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = \lambda \\ (\lambda+1)x + 2y + 2\lambda z = \lambda + 1 \\ (\lambda+2)x + 3y + 3\lambda z = \lambda + 2 \end{cases} .$$

Zadanie 4. Podaj bazy obrazu i jądra przekształcenia liniowego $F_M : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ zadanego przez macierz M:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 5. Niech $W, W_1, W_2 \leq V$ będą podprzestrzeniami V. Udowodnij, że

$$(W_1 \cap W) + (W_2 \cap W) \leq (W_1 + W_2) \cap W \ .$$

Zadanie 6. Podaj macierz odwrotną do poniższej macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 7. Udowodnij, że w przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym dla dowolnej pary wektorów u, v zachodzi

$$||u|| = ||v|| \quad \iff \quad (u-v) \perp (u+v) \ .$$

Wskazówka: Wyraź u, v przez $u - v$, $u + v$.