Algebra 2017/18 — Egzamin poprawkowy

Czas: 180 minut.

Egzamin ma 7 zadań, część na drugiej stronie.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1.

[2 punkty] Podaj definicję podprzestrzeni liniowej oraz warstwy podprzestrzeni liniowej.
[3 punkty] Udowodnij, że jeśli A, B są zbiorami wektorów z przestrzeni liniowej V oraz

$$A \subseteq B \subseteq \mathrm{LIN}(A)$$

to $\mathrm{LIN}(A) = \mathrm{LIN}(B)$.
[5 punktów] Dane są dwa układy wektorów S, T w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^5$:

$$S = \{(1, -2, 2, 0, -1)^T, (3, -2, 0, -2, 1)^T\} \quad T = \{(0, 1, -1, 0, 0)^T, (2, 0, -3, -3, 4)^T\} \ .$$

Podaj wymiar przestrzeni liniowych $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S \cup T)$. Oblicz i podaj bazę $\mathrm{LIN}(S \cup T)$.

Zadanie 2.

[2 punkty] Podaj wzory Cramera (które definiują rozwiązania układu równań przy użyciu wyznaczników); jakie warunki muszą być spełnione, by wzory te były prawdziwe?
[3 punkty] Udowodnij, że układ równań

$$AX = B$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$.
[5 punktów] Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ równań jest nad liczbami rzeczywistymi.

$$\begin{cases} -x & & + & \lambda^2 z & = & \lambda \\ & 2y & + & 4z & = & 2 \\ \lambda^2 x & + \ 4y & + & 7z & = & 3 \end{cases} \ .$$

Zadanie 3.

[2 punkty] Podaj definicję macierzy ortogonalnej.
[3 punkty] Niech V będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Udowodnij, że F zachowuje długość wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje iloczyn skalarny.

Dla przypomnienia: F zachowuje długość, jeśli dla każdego wektora $v \in V$ zachodzi $||v|| = ||Fv||$; F zachowuje iloczyn skalarny, jeśli dla każdej pary wektorów $u, v \in V$ zachodzi $\langle v, w \rangle = \langle Fv, Fw \rangle$.
[5 punktów] Udowodnij, że jeśli u, v są wektorami własnymi dla różnych wartości własnych macierzy ortogonalnej, to $\langle u, v \rangle = 0$.

Zadanie 4.

[2 punkty] Podaj definicję wartości własnej macierzy kwadratowej M i wektora własnego dla wartości własnej λ macierzy kwadratowej M.
[3 punkty] Udowodnij, że λ jest wartością własną macierzy kwadratowej A wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$.
[5 punktów] Niech A będzie kwadratową macierzą odwracalną. Pokaż, że: jeśli v jest wektorem własnym A dla wartości λ to v jest wektorem własnym A^{-1} dla wartości λ^{-1}.

Zadanie 5.

[2 punkty] Podaj definicję grupy cyklicznej. Podaj naturalny zbiór grup cyklicznych $\mathcal{C}$, taki że każda grupa cykliczna C jest izomorficzna z jedną z grup ze zbioru $\mathcal{C}$.
[3 punkty] Udowodnij, że dwie warstwy lewostronne podgrupy $H \leq G$ grupy G są albo równe albo rozłączne.

[5 punktów] Dla podanej permutacji σ podaj jej rozkład na cykle rozłączne. Czy jest ona parzysta? Podaj permutację odwrotną σ^{-1}.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 6 & 16 & 12 & 13 & 7 & 3 & 10 & 5 & 17 & 15 & 8 & 1 & 4 & 2 & 11 & 14 & 9 \end{pmatrix} \ .$$

Zadanie 6.

[2 punkty] Podaj definicję funkcji Eulera φ i twierdzenia Eulera (tego, które uogólnia małe twierdzenie Fermat'a).

[3 punkty] Udowodnij, że jeśli n, m są względnie pierwsze, to a jest odwracalne w $\mathbb{Z}_{mn}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \mod n$ jest odwracalne w $\mathbb{Z}_n$ i $a \mod m$ jest odwracalne w $\mathbb{Z}_m$.

[5 punktów] Oblicz poniższe wyrażenie arytmetyczne modulo 3, 7 oraz 21. Oznaczenie x^{-n} oznacza element odwrotny (w odpowiednim $\mathbb{Z}_p$) do x podniesiony do potęgi n.

$$(-425)^{-85} - (840)^{636} + (-420)^{231} - \left(632^{732} \cdot (-832)^{-423} \cdot (-641)\right)^{731} + (-212)^{-152} - (-313)^{-121} \cdot 215^{-832} \ .$$

Zadanie 7.

[2 punkty] Podaj definicje: ilorazu wielomianów, reszty z dzielenia wielomianów oraz podzielności wielomianów.

[3 punkty] Pokaż, że jeśli wielomian $h \in \mathbb{F}[x]$ jest nierozkładalnym wielomianem o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$, to w $\mathbb{F}[x]/\!\equiv_h$ istnieje element odwrotny dla $f \not\equiv_h 0$. Dla przypomnienia, $\mathbb{F}[x]/\!\equiv_h$ to pierścień wielomianów modulo wielomian h.

[5 punktów] Dla podanych wielomianów $f, g \in \mathbb{R}[x]$ o współczynnikach rzeczywistych podziel (z resztą) f przez g oraz podaj ich największy wspólny dzielnik.

$$f = x^7 - 2x^5 - 2x^3 + x$$
$$g = x^6 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \ .$$