Algebra 2017/18 — Egzamin

Czas: 180 minut.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń.

Zadanie 1.

[2 punkty] Podaj definicję macierzy odwracalnej.

[3 punkty] Udowodnij, że macierz kwadratowa M jest nieodwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma wartość własną 0.

[5 punktów] Udowodnij, że jeśli k-ta potęga M^k macierzy kwadratowej M jest nieodwracalna (gdzie $k \geq 1$ jest liczbą naturalną), to również M jest nieodwracalna.

Zadanie 2.

[2 punkty] Podaj definicję rzutu ortogonalnego, tj. jeśli $P : V \to V$ jest rzutem, to jakie zależności ma spełniać Pv oraz v dla $v \in V$.

[3 punkty] Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym, zaś $W \leq V$ jest podprzestrzenią liniową. Udowodnij, że jeśli $w_1, \ldots, w_k$ jest bazą ortonormalną W, to rzut prostopadły na W wyraża się wzorem:

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle \, w_i \ .$$

[5 punktów] Niech V będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym. Udowodnij, że dla zbioru wektorów $U \subseteq V$ zachodzi

$$U^\perp = (\mathrm{LIN}(U))^\perp \quad \text{oraz} \quad (U^\perp)^\perp = \mathrm{LIN}(U) \ .$$

Możesz korzystać z udowodnionych (na wykładzie i ćwiczeniach) własności LIN oraz $^\perp$.

Zadanie 3.

[2 punkty] Podaj definicję zbioru liniowo niezależnego przestrzeni liniowej V (nad ciałem $\mathbb{F}$).

[3 punkty] Pokaż, że jeśli V jest przestrzenią skończenie wymiarową, to niezależny zbiór U można rozszerzyć do bazy, tj. istnieje baza $B_U \supseteq U$.

[5 punktów] Niech $U \subseteq \mathbb{Z}_p^n$ będzie zbiorem $m \leq n$ niezależnych wektorów w przestrzeni liniowej $\mathbb{Z}_p^n$. Ile jest wektorów w $\mathbb{Z}_p^n$, które są liniowo niezależne od U?

Zadanie 4.

[2 punkty] Podaj definicję wartości własnej i jej wektora własnego.

[3 punkty] Udowodnij, że jeśli układ równań

$$AX = B \ ,$$

(gdzie A jest macierzą prostokątną, X wektorem zmiennych odpowiedniego rozmiaru zaś B wektorem wartości tego samego rozmiaru) ma rozwiązanie, to zbiór rozwiązań jest postaci $X_0 + \ker A$, gdzie X_0 jest dowolnym rozwiązaniem.

[5 punktów] Ile ma rozwiązań ma poniższy układ równań (nad liczbami rzeczywistymi), w zależności od wartości parametru λ?

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 3y - z = -5 \\ x + (1-\lambda^2)y + 5z = 21 + \lambda \end{cases} .$$

Zadanie 5.

[2 punkty] Podaj sformułowanie Chińskiego Twierdzenia o Resztach.

[3 punkty] Udowodnij poprawność Algorytmu Euklidesa (w którejś z wersji — wybierz której) dla liczb naturalnych.

[5 punktów] Policz poniższe wyrażenie modulo 5, 7 i 35:

$$-\left((-37)^{35} \cdot 71^{24}\right)^{-1} \cdot (-16 \cdot 11)^{-70} + \left(33^{350} \cdot 22^{-350} - 21^{340} \cdot 255^{120}\right)^{-71} - 349^{-132} \cdot 351^{-421} \ .$$

Zadanie 6.
[2 punkty] Podaj definicję największego wspólnego dzielnika dwóch wielomianów.
[3 punkty] Udowodnij, że jeśli $f, g \in \mathbb{F}[x]$ są dwoma wielomianami o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$ oraz $g \neq 0$ jest niezerowy, to można je podzielić z resztą, tj. istnieją dwa wielomiany $q, r \in \mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z $\mathbb{F}$, takie, że $f = qg + r$ oraz $\deg(r) < \deg(g)$.
[5 punktów] Podziel z resztą wielomian f przez wielomian g, gdzie $f, g \in \mathbb{R}[x]$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych:

$$f = x^7 - 2x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 4;$$
$$g = x^4 - 6x^2 - 7x - 6.$$

Zadanie 7.
[2 punkty] Podaj definicję rzędu elementu grupy G.
[3 punkty] Udowodnij, że jeśli permutacje g, h są cyklami rozłącznymi, to rząd gh to najmniejsza wspólna wielokrotność rzędów g oraz h.
[5 punktów] Dla podanej permutacji σ oblicz jej rząd, parzystość i rozkład na cykle rozłączne. Podaj permutację odwrotną:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 10 & 12 & 8 & 11 & 16 & 15 & 13 & 14 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 & 3 & 17 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$