Algebra - Lista 11

Zadanie 1 Czy zbiór $\{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ z działaniem składania permutacji jest podgrupą grupy S_4? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzyelementowe to czy otrzymamy podgrupą S_4?

Zadanie 2 Pokaż, że grupa S_n jest generowana przez dowolną transpozycję elementów sąsiednich oraz cykl $(1,2,3,\dots,n)$. Jest też generowana przez zbiór $\{(1,2),(2,3,\dots,n)\}$

Zadanie 3

- Wyznacz permutacje odwrotne do permutacji $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&1&3\end{pmatrix}$.
- Przedstaw permutację $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\3&7&8&10&11&2&6&5&4&9&1&12\end{pmatrix}$ jako złożenie cykli rozłącznych.
- Przedstaw permutacje $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&5&4&1\end{pmatrix}$ jako złożenia transpozycji.
- Jakie są rzędy permutacji z powyższych podpunktów?

Zadanie 4 (Grupa alternująca) Udowodnij, że jeśli G jest podgrupą grupy permutacji S_n to

- zbiór G_p permutacji parzystych z G jest podgrupą G;
- $|G_p| = |G|$ lub $|G_p| = \frac{|G|}{2}$.

W przypadku, gdy $G = S_n$ to ta podgrupa G_p to grupa alternująca A_n.

Zadanie 5 Dla macierzy $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$ rozpatrzmy funkcję:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Pokaż, że:

- $f(\mathrm{Id}_n) = 1$
- funkcja ta jest liniowa względem każdej kolumny macierzy
- zamiana kolumn macierzy zmienia jej znak

Wywnioskuj z tego, że jest to wyznacznik.

Wskazówka: Tylko trzeci punkt jest nietrywialny. Rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

Zadanie 6 Pokaż, że każda permutacja a A_n jest złożeniem cykli trzyelementowych.
Wskazówka: Pokaż najpierw, że iloczyn dwóch transpozycji da się przedstawić jako złożenie najwyżej dwóch takich cykli.

Zadanie 7 (Inwolucja) Inwolucją nazywamy dowolną funkcję $f : A \mapsto A$ taką, że $f \circ f$ jest identycznością. Zauważ, że inwolucje zbioru $\{1,2,\dots,n\}$ są permutacjami z S_n.

- Jak wygląda rozkład inwolucji na cykle?
- Przedstaw permutację cykliczną $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ jako złożenie dwóch inwolucji.
- Udowodnij, że każda permutacja z S_n jest złożeniem dwóch inwolucji.

Zadanie 8 Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\7&4&1&2&9&8&3&5&10&6\end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\12&5&7&14&6&2&1&10&4&9&13&3&11&8\end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\7&3&10&1&13&14&9&6&4&12&5&2&11&8\end{pmatrix}.$$

podaj permutację odwrotną σ^{-1}; rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. które z permutacji σ, σ^{-1} są parzyste?

Zadanie 9 Dla podanych podzbiorów grupy permutacji S_4 określ, czy są one podgrupami S_4 (permutacje podane są jako rozkłady na cykle; Id oznacza permutację identycznościową). Jeśli podany zbiór jest podgrupą, wystarczy odpowiedź „TAK”. Jeśli nie jest, to odpowiedź „NIE” uzasadnij.

- $\{(1234); (1432); (13)(24); \mathrm{Id}\}$;
- $\{(12)(34); (13)(24); \mathrm{Id}\}$;
- $\{(12)(34); \mathrm{Id}\}$;
- $\{(13); (24); (14)(23); (12)(34); (1234); (13)(24); (1432); \mathrm{Id}\}$;
- $\{(12)(34); (13)(24); (14)(23); \mathrm{Id}\}$;
- $\{(1234); (12)(34); \mathrm{Id}\}$;

Zadanie 10 (Sprzężenie) Rozważmy grupę G i zdefiniujmy jej *sprzężenie*:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1}.$$

Pokaż, że

- $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$;
- φ_a jest izomorfizmem z G w G.