Egzamin licencjacki/inżynierski — 23 czerwca 2015

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych i Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów. Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznacza się czas 3x40=120 minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Niech A będzie dowolnym zbiorem. *Multizbiorem* nad A nazywamy dowolną funkcję $S : A \to \mathbb{N}$ (mówimy wtedy, że $S(x)$ jest liczbą wystąpień elementu x w multizbiorze S). Jeśli S_1 i S_2 są multizbiorami, to ich przekrój $S_1 \cap S_2$ i sumę $S_1 \cup S_2$ definiujemy wzorami

$$\begin{aligned}(S_1 \cap S_2)(x) &= \min(S_1(x), S_2(x))\\ (S_1 \cup S_2)(x) &= S_1(x) + S_2(x).\end{aligned}$$

(a) Czy dla dowolnych multizbiorów X, Y, Z nad zbiorem A zachodzi równość

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \ ?$$

(b) Czy dla dowolnych multizbiorów X, Y, Z nad zbiorem A zachodzi równość

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \ ?$$

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić.

Matematyka II — Algebra

Za zadania można otrzymać 12 punktów. Aby otrzymać ocenę dostateczną, należy zdobyć 4 punkty, próg dla dst+ to 5.5p, dla db – 7p, dla db+ 9p, dla bdb – 11p.

Zadanie 1 – 6 punktów
Znaleźć k takie, że wektory $v_1 = [1\ 1\ 1\ 2]$, $v_2 = [2\ 1\ 1\ 2]$, $v_3 = [0\ 0\ 2\ 1]$, $v_4 = [1\ 2\ 2\ 0]$ są liniowo zależne nad ciałem $\mathbb{Z}_k^4$.
Zadanie 2 – 3 + 3 punkty
a) Znaleźć $a, b \in \mathbb{Z}$ takie, że $21a + 29b = 1$.
b) Rozwiązać równanie $8x \equiv_{21} 1$

Programowanie

Za zadanie można otrzymać 20 punktów. Aby otrzymac ocenę dostateczną, należy zdobyć 7 punktów, próg dla dst+ to 9p, dla db – 11p, dla db+ 13p, dla bdb – 15p.

Część 1. Gramatyka G_1 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b, c\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji:

$$\{S \rightarrow \varepsilon,\ S \rightarrow SS,\ S \rightarrow aSb,\ S \rightarrow cSb,\ S \rightarrow bSa,\ S \rightarrow bSc\} \quad (1)$$

Dla gramatyki G przez $L(G)$ rozumieć będziemy język generowany przez G. Dla wyrażenia regularnego r przez $\mathcal{L}(r)$ rozumiemy język opisany przez wyrażenie r.

a) Czy $abcbab$ należy do $L(G_1)$? Odpowiedź uzasadnij. **(1)**

b) Czy gramatyka G_1 jest jednoznaczna? Odpowiedź krótko uzasadnij. **(2)**

c) Przedstaw wyrażenie regularne lub gramatykę bezkontekstową generującą zbiór $A_1 = \mathcal{L}(a^*b^*c^*) \cap L(G_1)$ **(2)**

d) Przedstaw wyrażenie regularne lub gramatykę bezkontekstową generującą zbiór $A_2 = \mathcal{L}((ab + bc + ac)^*) \cap L(G_1)$ **(2)**

e) Napisz w języku imperatywnym funkcję, która bierze jako wejście napis i zwraca wartość logiczną, równą True wtedy i tylko wtedy, gdy ten napis należy do zbioru A_1. Możesz używać języka wybranego z następującej listy: C, C++, Java, C#, Python, Ruby, PHP, AWK, Pascal. **(3)**

Część 2. Będziemy rozważać wyrażenia arytmetyczne zbudowane z cyfr, nawiasów i operatorów mnożenia i dodawania. Napisz w Prologu predykat `expression(?E,+NOp,?Val)`, który jest prawdziwy, jeżeli wyrażenie `E` ma dokładnie `NOp` operatorów oraz jego wartość wynosi `Val`. Predykat powinien działać również jako generator wyrażeń o zadanych właściwościach. **(5p)**

Część 3. Napisz w Haskellu funkcję, która bierze listę dowolnego typu i zwraca parę list, skonstruowaną w ten sposób, że pierwszy element argumentu trafia do pierwszej listy, drugi do drugiej, trzeci do pierwszej, czwarty do drugiej itd. Podaj typ tej funkcji. **(3p)**

Część 4. Rozważmy następującą klasę programów w Haskellu:

```
loop = loop

f True True   = V1
f False True  = V2
f True False  = V3
f False False = V4
```

gdzie `V1`, `V2`, `V3`, `V4`, są równe `False`, `True` albo `loop`. Podaj przykład 4 funkcji, które mają taki sam typ jak `f`, a których nie można zdefiniować za pomocą tego schematu. **(2p)**

Matematyka dyskretna

Znajdź funcję $f(n)$ w postaci zwartej taką, że $\sum_{k=1}^{n} k^{1.23} \sim f(n)$.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: poprzednik w B–drzewie (5 punktów)

Wyjaśnij, jak znaleźć poprzednika danego klucza przechowywanego w B–drzewie.

- Opisz szczegółowo strukturę B–drzewa.
- Podaj efektywny algorytm rozwiązujący ten problem (procedura napisana w pseudokodzie z wyczerpującymi komentarzami).
- Uzasadnij, że opisany algorytm działa poprawnie.
- Przeanalizuj złożoność obliczeniową przedstawionej metody.

Zadanie 2: element dominujący (4 punkty)

Tablica $A[0 \ldots n-1]$ posiada element dominujący, jeśli ponad połowa elementów w tej tabicy ma taką samą wartość. Wyjaśnij, jak stwierdzić, czy w zadanej tablicy znajduje się element dominujący, a jeśli tak, to jaka jest jego wartość.

Elementy w tablicy nie muszą należeć do zbioru uporządkowanego, jak na przykład zbiór liczb całkowitych. Możesz jednak zadawć pytania o równość elementów: czy $A[i] = A[j]$?

- Zaprojektuj efektywny algorytm sprawdzający, czy w zadanej tablicy znajduje się element dominujący (procedura napisana w pseudokodzie z wyczerpującymi komentarzami).
- Uzasadnij, że opisany algorytm działa poprawnie.
- Przeanalizuj złożoność obliczeniową przedstawionej metody.

Metody numeryczne

1. Znajdź postać Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_7 \in \Pi_7$ dla następujących danych:

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	0	2015	2	3	4	5	6	7

.

2. Niech $L_n \in \Pi_n$ oznacza wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji $f(x) = e^{2x}$ i węzłów *Czebyszewa*. Znajdź taką liczbę naturalną n, że

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-6}.$$

3. Załóżmy, że wartości funkcji f znamy jedynie w punktach $x_k := \dfrac{k}{1024}$ $(k = 0, 1, \ldots, 1024)$. Zaproponuj metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$