

Egzamin licencjacki/inżynierski

20 lutego 2023

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas $3 \times 40 + 30 = 150$ minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Niech \mathbb{N} oznacza zbiór liczb naturalnych a \mathbb{N}_+ zbiór liczb naturalnych dodatnich. Czy istnieje taka relacja równoważności \simeq na \mathbb{N} , że wszystkie jej klasy abstrakcji są skończone a funkcja przyporządkowująca każdej klasie abstrakcji jej moc, $f : \mathbb{N}/\simeq \rightarrow \mathbb{N}_+$, $f(x) = |x|$, jest bijekcją? Uzasadnij odpowiedź.

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (5 punktów)

Znaleźć wielomian (możliwie niskiego stopnia) który w punktach 1, 2, 3 przyjmuje wartości 1, 6, 5. UWAGA: chodzi o wielomian nad ciałem \mathbb{Z}_7 .

Zadanie 2. (5 punktów)

Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $A = [c_1 : c_2 : \dots : c_n]$ (czyli c_i to i -ta kolumna macierzy A) oraz $B = (b_{ij})$. Rozważamy iloczyn $C = A \cdot B$. W jaki sposób elementy b_{ij} opisują operacje na kolumnach macierzy A ?

Zadanie 3. (4 punkty)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & & & & \\ b_2 & a_2 & b_3 & & & \\ & b_3 & a_3 & b_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & & b_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Udowodnić, że $D_k = a_k D_{k-1} - b_k^2 D_{k-2}$ ($k = 3, 4, \dots$).

Progi punktowe: 4, 6, 8, 10, 12 punktów.

Matematyka dyskretna

Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ definiujemy *graf krawędziowy* $L(G)$, którego zbiorem wierzchołków jest E i dwie krawędzie są sąsiednie gdy mają wspólny wierzchołek. Pokaż, że jeżeli G jest eulerowski, to $L(G)$ jest eulerowski i hamiltonowski.

Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Racket.

Zadanie 1 Zaimplementuj jednoargumentową procedurę `sorted?`, która rozstrzyga czy dana lista wartości numerycznych jest uporządkowana niemalejąco.

Zadanie 2 Zaimplementuj dwuargumentową procedurę `contained?`, która rozstrzyga czy wszystkie elementy jednej listy wartości numerycznych występują w drugiej liście (liczba wystąpień danego elementu ma znaczenie).

Zadanie 3 Zaimplementuj procedurę `sort`, która spełnia następującą specyfikację:

$$\begin{aligned} &(\text{sorted? } (\text{sort } xs)) \equiv \#t \\ &\wedge (\text{contained? } (\text{sort } xs) \ xs) \equiv \#t \\ &\wedge (\text{contained? } xs \ (\text{sort } xs)) \equiv \#t \end{aligned}$$

dla wszystkich list wartości numerycznych xs . Wybór metody sortowania należy do Ciebie. Uzasadnij, *nieformalnie*, że Twoja procedura spełnia zadaną specyfikację.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla `dst+` to 5.5 pkt., dla `db` – 7 pkt., dla `db+` 8.5 pkt., a dla `bdb` – 10 pkt.

1. **4 punkty** Udowodnij, że dodatnia liczba rzeczywista ma skończone rozwinięcie dwójkowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $m/2^n$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi. Jakie znaczenie ma ta obserwacja w kontekście wprowadzania danych do arytmetyki fl i wykonywania w niej operacji zmiennopozycyjnych? Odpowiedź **dokładnie** uzasadnij, **odwołując się** do omówionego na wykładzie modelu arytmetyki zmiennopozycyjnej.
2. **4 punkty** Przedstaw **szczegółowo** dowolną metodę numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych.
3. **4 punkty** Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Jak **efektywnie wyznaczać** takie wielomiany? Jakie jest ich **zastosowanie** w analizie numerycznej?

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: podział zbioru na dwie części o takiej samej wadze (4 punkty)

Dany jest zbiór n dodatnich liczb całkowitych $Z = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ takich, że sumują się one do $S = \sum_{a \in Z} a$. Skonstruuj i opisz algorytm decyzyjny, który odpowie na pytanie, czy można tak rozdzielić elementy tego zbioru na dwa rozłączne podzbiory X i Y (czyli $X \cup Y = Z$ oraz $X \cap Y = \emptyset$), aby elementy tych podzbiorów sumowały się do tej samej wartości, czyli $\sum_{x \in X} x = \sum_{y \in Y} y = \frac{S}{2}$.

Zaprojektuj pseudowielomianowy algorytm oparty na programowaniu dynamicznym, który rozwiąże ten problem. Opisz ideę algorytmu a potem zapisz go w pseudokodzie (wraz z niezbędnymi komentarzami). Uzasadnij poprawność opisanego algorytmu. Przeanalizuj jego złożoność obliczeniową (czasową i pamięciową); uzasadnij dlaczego jest on pseudowielomianowy.

Zadanie 2: kopiec dwumianowy w wersji gorliwej i leniwej (5 punktów)

Czym są *kolejki priorytetowe* oraz *złączalne kolejki priorytetowe* jako abstrakcyjne struktury danych.

Opisz budowę *kopca dwumianowego* jako implementację złączalnej kolejki priorytetowej:

- Jakie operacje są wykonywane na takich kopcach? Opisz krótko każdą z nich.
- Kopce dwumianowe zbudowane są z drzew dwumianowych. Jaką strukturę mają takie drzewa?
- Jaki porządek jest ustalony w kopcu dwumianowym?
- Przeanalizuj złożoność czasową operacji wykonywanych na kopcach dwumianowych?

Napisz w pseudokodzie implementację operacji *meld*. Jak wykorzystuje się tą operację do implementacji innych operacji na kopcu dwumianowym?

Opisz różnicę pomiędzy kopcem dwumianowym w wersji gorliwej (ang. *eager*) a kopcem dwumianowym w wersji leniwej (ang. *lazy*).

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Rozważmy problem RCW (Regular crosswords): dane dodatnie liczby naturalne n, m , alfabet Σ oraz deterministyczne automaty skończone $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ nad Σ , czy istnieje macierz T o wymiarze $n \times m$ wypełniona literami Σ , tak aby:

1. każdy wiersz i (interpretowany jako słowo) macierzy T , należał do $L(A_i)$
2. każda kolumna j (interpretowana jako słowo) macierzy T , należała do $L(B_j)$?

Jaka jest złożoność problemu RCW?