Semantyka języków programowania

II UWr 2013/14

Lista zadań nr 11

Na ćwiczenia 14 stycznia 2014

Zadanie 1. Niech predykat $\Uparrow^{\mathsf{co}}$ nieterminacji wykonania instrukcji języka IMP w semantyce małych kroków będzie zdefiniowany koindukcyjnie tak jak na wykładzie. Pokaż, że dla dowolnej konfiguracji γ, $\gamma \Uparrow^{\mathsf{co}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieskończony ciąg konfiguracji $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ taki, że $\gamma_0 = \gamma$ oraz $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ dla każdego i.

Zadanie 2. Niech predykat $\uparrow^{\mathsf{co}}$ nieterminacji wykonania instrukcji języka IMP w semantyce dużych kroków będzie zdefiniowany koindukcyjnie tak jak na wykładzie. Pokaż, że dla dowolnej instrukcji c oraz stanu σ, $\langle c, \sigma\rangle \uparrow^{\mathsf{co}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle c, \sigma\rangle \Uparrow^{\mathsf{co}}$.

Zadanie 3. Niech $\to^{\mathsf{co}}$ będzie relacją otrzymaną przez koindukcyjną interpretację reguł definiujących semantykę naturalną języka IMP.

1. Pokaż, że jeżeli $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$, to $\langle c, \sigma\rangle \to^{\mathsf{co}} \sigma'$.
2. Pokaż, że dla dowolnych σ i σ', $\langle \mathsf{while\ true\ do\ skip}, \sigma\rangle \to^{\mathsf{co}} \sigma'$, a następnie uogólnij ten wynik i udowodnij, że jeżeli $\langle c, \sigma\rangle \uparrow^{\mathsf{co}}$, to dla dowolnego σ' zachodzi $\langle c, \sigma\rangle \to^{\mathsf{co}} \sigma'$.
3. Pokaż, że jeżeli $\langle c, \sigma\rangle \to^{\mathsf{co}} \sigma'$, to zachodzi dokładnie jedna z własności $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$ i $\langle c, \sigma\rangle \uparrow^{\mathsf{co}}$.

Zadanie 4. Rozważmy fragment języka IMP z chronionymi komendami:

$$\begin{array}{lcl} c & ::= & \mathsf{skip} \mid X := a \mid \mathsf{fail} \mid c\,;\,c \mid \mathsf{if}\ g \mid \mathsf{do}\ g \\ g & ::= & b \to c \mid g \,\Box\, g \end{array}$$

Zdefiniuj semantykę denotacyjną tego języka:

$$\mathcal{G} : \mathsf{Gcom} \to \mathbf{\Sigma} \to \mathcal{P}_{\mathsf{DOM}}(\hat{\mathbf{\Sigma}} \cup \{\mathsf{fail}\})$$
$$\mathcal{C} : \mathsf{Com} \to \mathbf{\Sigma} \to \mathcal{P}_{\mathsf{DOM}}(\hat{\mathbf{\Sigma}})$$

Zadanie 5. Niech $X_0, X_1, \ldots$ będzie ciągiem elementów $\mathcal{P}_{\mathsf{DOM}}(S_\perp)$, gdzie $S_\perp$ jest płaską dziedziną.

1. Załóżmy, że $\perp \in X_i$ dla wszystkich i. Udowodnij, że $X_0 \sqsubseteq X_1 \sqsubseteq \ldots$ jest ω-łańcuchem wtedy i tylko wtedy, gdy $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots$ i wówczas $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} X_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$.

2. Załóżmy, że istnieje najmniejsze $n \geq 0$ takie, że $\perp \notin X_n$. Udowodnij, że $X_0 \sqsubseteq X_1 \sqsubseteq \ldots$ jest ω-łańcuchem wtedy i tylko wtedy, gdy X_n jest skończony i $X_0 \subseteq \ldots \subseteq X_{n-1} \hat{\subseteq} X_n = X_{n+1} = \ldots$, gdzie

$$X_{n-1} \hat{\subseteq} X_n$$

oznacza, że

$$X_{n-1} \subseteq X_n \cup \{\perp\} \text{ oraz } \perp \in X_{n-1} \text{ i } \perp \notin X_n.$$

i że wówczas wszystkie elementy ciągu są skończone i $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} X_i = X_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i - \{\perp\}$.