# Semantyka języków programowania

II UWr 2013/14

## Lista zadań nr 10

Na ćwiczenia 17 grudnia 2013

**Zadanie 1.** Na wykładzie na bazie etykietowanej semantyki małych kroków języka IMP z wejściem i wyjściem zdefiniowaliśmy funkcję semantyczną $F : \Gamma \to \Omega$ jako najmniejsze rozwiązanie następującego równania rekurencyjnego:

$$F\gamma = \begin{cases} \bot & \text{gdy } \gamma \Uparrow \\ \iota_{term}\sigma' & \text{gdy } \gamma \Rightarrow^* \sigma \\ \iota_{out}(n, F\gamma'') & \text{gdy } \exists\gamma'.\gamma \Rightarrow^* \gamma' \text{ i } \gamma' \overset{!n}{\Longrightarrow} \gamma'' \\ \iota_{in}(\lambda n.F\gamma_n) & \text{gdy } \exists\gamma'.\gamma \Rightarrow^* \gamma' \text{ i } \forall n.\gamma' \overset{?n}{\Longrightarrow} \gamma_n \end{cases}$$

gdzie $\Gamma$ jest zbiorem konfiguracji, a $\Omega$ rozwiązaniem izomorfizmu

$$\Omega \approx (\Sigma + (\mathbb{Z} \times \Omega) + (\mathbb{Z} \to \Omega))_\bot.$$

Pokaż, że taka funkcja $F$ istnieje, tzn., że odpowiedni funkcjonał ma najmniejszy punkt stały.

**Zadanie 2.** Dla instrukcji języka IMP z wejściem/wyjściem definiujemy relację: $c_0 \approx_c c_1$ wtw $\forall\sigma \in \Sigma.\langle c_0, \sigma\rangle \approx \langle c_1, \sigma\rangle$, gdzie relacja $\approx$ jest największą bisymulacją, zdefiniowaną na wykładzie dla etykietowanego systemu przejść opartego na semantyce małych kroków. Pokaż, że $\approx_c$ jest kongruencją.

**Zadanie 3.** Pokaż, że $c_0 \approx_c c_1$, gdzie

1. $c_0 = \mathsf{while\ true\ do}\ c$,
   $c_1 = \mathsf{while\ true\ do}\ c\,;\,c'$
2. $c_0 = X := 0\,;\,\mathsf{while\ true\ do}\ (!X\,;\,X := X + 2)$,
   $c_1 = X := 0\,;\,\mathsf{while\ true\ do}\ (!(2 * X)\,;\,X := X + 1)$

**Zadanie 4.** Kratą zupełną nazywamy dowolny porządek częściowy, w którym każdy podzbiór posiada najmniejsze ograniczenie górne. Pokaż, że w kracie zupełnej każdy podzbiór posiada największe ograniczenie dolne, a także, że krata zupełna posiada element najmniejszy oraz element największy. Pokaż następnie, że dla dowolnego zbioru $X$, jego zbiór potęgowy $\mathcal{P}(X)$ z relacją inkluzji tworzy kratę zupełną.

**Zadanie 5.** Niech $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ będzie funkcją monotoniczną. Udowodnij, że zbiór $\mathit{lfp}(F) = \bigcap\{S \mid F(S) \subseteq S\}$ spełnia $F(\mathit{lfp}(F)) \subseteq \mathit{lfp}(F)$, a zatem jest najmniejszym zbiorem spełniającym tę własność. Pokaż następnie, że $\mathit{lfp}(F)$ jest najmniejszym punktem stałym funkcji $F$.

Udowodnij też, że zbiór $\mathit{gfp} = \bigcup\{S \mid S \subseteq F(S)\}$ spełnia $\mathit{gfp}(F) \subseteq F(\mathit{gfp}(F))$, a zatem jest największym zbiorem spełniającym tę własność. Pokaż następnie, że $\mathit{gfp}(F)$ jest największym punktem stałym funkcji $F$.